

# سنتر منطقی چندهدفه مدارهای کوانتومی

آرزو رجایی، محبوبه هوشمند و سید عابد حسینی

سیستم‌های مکانیک کوانتوم است. این عرصه از علم در حقیقت شامل سه علم نظریه اطلاعات، علوم کامپیوتر و فیزیک کوانتوم است [۳]. دانشمندان انتظار دارند که کامپیوترهای کوانتومی بتوانند باعث تحولات چشم‌گیری در زمینه‌های مختلف مانند افزایش چشم‌گیر سرعت پردازش اطلاعات، انتقال امن داده‌ها، رفع محدودیت‌های مدارهای مجتمع و کاهش مصرف انرژی شوند.

از جمله زمینه‌های مرتبط با محاسبات کوانتومی می‌توان به بحث سنتر منطقی مدارهای کوانتومی اشاره کرد. سنتر منطقی مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به یک سری گیت‌های پایه (با توجه به کتابخانه گیت‌های جامع) اطلاق می‌شود. مسئله سنتر منطقی و بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی یک مسئله سخت<sup>۱</sup> است [۴]. یکی از متداول‌ترین کتابخانه‌های گیت‌های جامع، کتابخانه گیت‌های پایه<sup>۲</sup> است که از گیت CNOT و کلیه گیت‌های تک‌کیوبیتی تشکیل شده است. به منظور ارزیابی یک مدار کوانتومی، معیارهای هزینه مختلفی مانند تعداد گیت‌های CNOT و تک‌کیوبیتی، هزینه کوانتومی و عمق مدار وجود دارد. ساختار ادامه این مطالعه از این قرار است: در بخش ۲، پیش‌زمینه‌های مورد نیاز در رابطه با محاسبات کوانتومی بیان شده‌اند. در بخش ۳ به تعریف روش سنتر منطقی چندهدفه مدارهای کوانتومی و در بخش ۴ به بررسی نتایج این روش پرداخته شده است. بخش ۵ به جمع‌بندی می‌پردازد و پیشنهادهایی برای کارهای آتی دارد.

## ۲- پیش‌زمینه

محاسبات کوانتومی حاصل ترکیب مکانیک کوانتومی و نظریه اطلاعات کلاسیک است و منجر به رخدادهای عجیب و قدرتمندی در حوزه کوانتوم می‌شود. در زیربخش ۱-۲، تاریخچه محاسبات کوانتومی، در زیربخش ۲-۲، کارهای قبلی مربوط به سنتر منطقی مدارهای کوانتومی و در زیربخش ۳-۲، اصول محاسبات کوانتومی مطرح می‌شود.

## ۲-۱ تاریخچه محاسبات کوانتومی

محاسبات کوانتومی، شاخه جدیدی از پردازش اطلاعات بر مبنای اصول مکانیک کوانتومی است. هرچند هنوز کامپیوترهای کوانتومی کاملاً عملی ساخته نشده‌اند، اما آینده کامپیوترهای کوانتومی بسیار روشن به نظر می‌رسد.

ایده دستگاه محاسباتی بر مبنای مکانیک کوانتومی برای اولین بار در دهه ۱۹۷۰ و اوایل دهه ۱۹۸۰ توسط فیزیکدانان و متخصصین کامپیوتر از قبیل چارلز بنت<sup>۳</sup>، پل بنیوف<sup>۴</sup>،

چکیده: محاسبات کوانتومی، روش جدیدی از پردازش اطلاعات است که بر مبنای مفاهیم مکانیک کوانتومی بنا شده و منجر به رخدادهای عجیب و قدرتمندی در حوزه کوانتوم می‌شود. سنتر منطقی مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت داده‌شده کوانتومی به مجموعه‌ای از گیت‌ها با قابلیت پیاده‌سازی در تکنولوژی‌های کوانتومی اطلاق می‌شود. از معروف‌ترین روش‌های سنتر منطقی CSD و QSD هستند. هدف اصلی این مقاله، ارائه یک روش سنتر منطقی چندهدفه ترکیبی از دو روش فوق در مدل مداری محاسباتی با هدف بهینه‌سازی معیارهای ارزیابی است. در این روش پیشنهادی، فضای جوابی از ترکیب‌های مختلف روش‌های تجزیه CSD و QSD ایجاد می‌شود. فضای جواب ایجادشده، یک فضا با اندازه نمایی بسیار بزرگ است. سپس با استفاده از یک رهیافت پایین به بالا از روش حل برنامه‌ریزی پویای چندهدفه، روشی ارائه می‌شود تا تنها بخشی از کل فضای جواب، برای یافتن مدارهایی با هزینه‌های بهینه پرتو جستجو شوند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که این روش، موازنه‌ای بین معیارهای ارزیابی ایجاد می‌کند و پاسخ‌های بهینه پرتو متعددی تولید کرده که با توجه به تکنولوژی‌های مختلف کوانتومی می‌توانند انتخاب شوند.

کلیدواژه: محاسبات کوانتومی، مدل مداری کوانتومی، سنتر منطقی، بهینه‌سازی چندهدفه، برنامه‌ریزی پویا.

## ۱- مقدمه

در طول چند دهه گذشته با پیشرفت شگفت‌انگیز فناوری، روند کوچک‌سازی ترانزیستورها در ساخت تراشه‌های کامپیوتری پدیدار شده است، به گونه‌ای که امروزه ریزپردازنده‌ها دربرگیرنده بیش از صدها میلیون ترانزیستور هستند. قانون مور بیان می‌کند که در هر ۱۸ ماه، تعداد ترانزیستورهای یک تراشه الکترونیکی دو برابر می‌شود [۱]. پیروی از قانون مور سبب می‌شود که اندازه ترانزیستورها در نهایت به اندازه اتم باشد. با رسیدن به اندازه اتمی در تراشه‌ها، نظریه ریاضیات حاکم بر علم کامپیوتر نوین نقض می‌شود. در چنین ابعادی قوانین کوانتومی بر ساخت تراشه‌ها حاکم خواهد شد، نه قوانین موجود در طراحی و ساخت تراشه‌های امروزی. بدین منظور دانشمندان، نظریه جدیدی تحت عنوان محاسبات کوانتومی بیان نمودند که در مقیاس بسیار کوچک، قوانین مورد نظر، قوانین مربوط به مکانیک کوانتومی هستند [۲].

محاسبات و فناوری اطلاعات کوانتومی، علم پردازش اطلاعات توسط

این مقاله در تاریخ ۲۲ آذر ماه ۱۴۰۰ دریافت و در تاریخ ۸ اسفند ماه ۱۴۰۰ بازنگری شد.

آرزو رجایی، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، (email: rajaei@mshdiau.ac.ir)

محبوبه هوشمند (نویسنده مسئول)، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، (email: hoshmand@mshdiau.ac.ir)

سید عابد حسینی، گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، (email: hosseyni@mshdiau.ac.ir)

1. NP-Hard Problem
2. Basic Gate Library
3. Charles H. Benet
4. Paul A. Benioff

مورد نیاز برای ساخت هر ماتریس بر روی  $n$  کیوبیت برابر با  $O(n^2)$  گزارش شده است. با استفاده از تجزیه QR در [۱۴] که بر مبنای استفاده از ماتریس‌های دوسطحی یکانی است، همین مرتبه به دست می‌آید. ماتریس‌های دوسطحی یکانی<sup>۷</sup>، زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های یکانی هستند که به صورت غیر بدیهی فقط بر روی دو بردار عمل می‌کنند. سپس در [۱۵]، بیشترین مقدار حد پایین مرزی<sup>۸</sup> برای تعداد گیت CNOT در سنتز منطقی مدارهای کوانتومی برابر  $[(1/4)(4^n - 3n - 1)]$  می‌باشد. پس از آن با استفاده از روش سنتز منطقی مبتنی بر روش تجزیه شناخته‌شده CS<sup>۹</sup> در [۱۶] در جبر خطی با نام CSD مرتبه تعداد CNOT به  $2^{n+1} - 2^n - 2$  رسید. در [۱۷] با بهبود روش CSD، تعداد CNOT‌ها به  $2^{n+1} - 2^n - 2$  رسید و تعداد کمتری از گیت‌های تک کیوبیتی را تولید می‌کند. سپس [۱۸] با تعریف سنتز منطقی مبتنی بر تجزیه CS با عنوان QSD<sup>۱۰</sup> به تولید  $\frac{4}{3}2^n + \frac{3}{2}2^n - \frac{23}{48}2^n$  تعداد گیت CNOT رسید. مقاله [۱۹] روشی به نام BQD<sup>۱۱</sup> را طراحی کرده که ترکیبی از دو روش CSD و QSD می‌باشد که در نهایت منجر به ارائه روش جدیدی با خصوصیات جدید و ترکیبی از خواص دو روش نام برده شده است. در نهایت، روش BQD در [۲۰] بهبود یافته و منجر به ارائه روش جدیدی با نام IBQD<sup>۱۲</sup> با خصوصیات جدید و نتایج بهتر شده است.

از آنجا که سیستم‌های کوانتومی بیشتر از محاسبات کلاسیک در معرض خطا هستند، مدارهای کوانتومی تحمل‌پذیر اشکال برای پیاده‌سازی عملی مورد نیازند. بسیاری از کدهای تصحیح اشکال کوانتومی [۲۱] تا [۲۴]، برای ممکن ساختن محاسبات تحمل‌پذیر اشکال ارائه شده‌اند که از گیت‌های کتابخانه حاوی گیت‌های کلیفورد و  $T$  استفاده می‌کنند. برخی از پژوهش‌های اخیر در حوزه سنتز کوانتومی نیز به سنتز کوانتومی با هدف تحمل‌پذیری اشکال می‌پردازند. در [۲۴] تا [۲۶]، سنتز منطقی مدارهای کوانتومی عمده‌تاً با استفاده از کتابخانه گیت‌های کلیفورد و  $T$  صورت می‌گیرد.

کتابخانه کلیفورد و  $T$  که شامل گیت‌های CNOT، هادامارد، فاز و  $T$  می‌باشد، یک کتابخانه تقریباً جهانی است. یکی از راهکارهایی که برای کاهش محدودیت این کتابخانه ارائه شده است، گسترش آن می‌باشد [۲۶]، یعنی افزودن گیت‌های جدید به کتابخانه. این عمل سبب می‌شود در صورت وجود این گیت‌ها در مدار کوانتومی بدون خاصیت تحمل‌پذیر اشکال، نیازی به سنتز آن نباشد. همین امر سبب بهبود هزینه‌های این سنتز خواهد شد. حتی با وجود گسترش کتابخانه، باز هم امکان تجزیه دقیق یک گیت دلخواه به گیت‌های کلیفورد و  $T$  وجود ندارد.

در [۲۷] از الگوریتم‌های مبتنی بر ریاضی برای طراحی یک روش سنتز منطقی دقیق با توجه به کتابخانه کلیفورد و  $T$  استفاده شده و همچنین با استفاده از کیوبیت‌های کمکی برای عملگرهای کلیفورد و  $T$ ، تعداد کل گیت‌های ابتدایی این کتابخانه به کار رفته  $O(3^{nk})$  می‌باشد ( $k$  مؤلفه مخرج<sup>۱۳</sup> است). مقاله [۲۸]، روش سنتز دقیق پیشنهاد شده در [۲۷] را در سطح جهانی بهبود داده و از نمودار تصمیم‌گیری چندمقداری

دیوید دویج<sup>۱</sup> و ریچارد فاینمن<sup>۲</sup> مطرح شد. این ایده زمانی ظاهر شد که دانشمندان با محدودیت‌های اساسی محاسبات روبه‌رو گردیدند و متوجه شدند که اگر فناوری طبق قانون مور<sup>۳</sup> جلو رود، اندازه عناصر مداری که روی تراشه‌های سیلیکونی تعبیه می‌شوند عاقبت، بیشتر از چند اتم نخواهد بود. مشکلی که در اینجا پیش می‌آید این است که در اندازه اتمی، قوانین فیزیکی که بر رفتار اتم‌ها حاکم هستند، قوانین مکانیک کوانتومی هستند و نه قوانین مکانیک کلاسیک.

فاینمن [۵]، جزو اولین افرادی بود که در سال ۱۹۸۲، مدلی انتزاعی پیشنهاد کرد که نشان می‌داد چگونه یک سیستم کوانتومی می‌تواند محاسبات را انجام دهد. سپس در سال ۱۹۸۵، دوستج [۶] دریافت که ایده فاینمن می‌تواند عاقبت به یک کامپیوتر همه‌کاره منجر شود و یک مقاله منتشر کرد که به صورت نظری نشان می‌داد هر فرایند فیزیکی را می‌توان کاملاً با یک کامپیوتر کوانتومی مدل کرد. موفقیت اصلی توسط شور در سال ۱۹۹۴، وقتی او به کمک کامپیوترهای کوانتومی، روشی برای شکستن یک مسئله مهم در نظریه اعداد- تجزیه اعداد به عوامل اول [۷] و [۸] پیدا کرد، حاصل شد. او نشان داد که مجموعه‌ای از اعمال ریاضی که برای کامپیوتر کوانتومی طراحی شده‌اند، قابلیت تجزیه اعداد بزرگ را بر روی کامپیوترهای کوانتومی، بسیار سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیک دارند. با این موفقیت و همین‌طور کشف الگوریتم جستجوی گراور [۹]، محاسبات کوانتومی از یک کنجکاو دانشگاهی صرف، به یک علاقه جهانی تبدیل شد.

حوزه محاسبات کوانتومی مدرن، با کشف توزیع کلید کوانتومی [۱۰]، توانایی ارسال یک بیت کوانتومی به کمک دو بیت کلاسیک و یک بیت درهم‌تنیدگی (مخبره از راه دور کوانتومی [۱۱]) و توانایی ارسال دو بیت کلاسیک با ارسال یک بیت کوانتومی و یک بیت درهم‌تنیدگی (کدگذاری چگال<sup>۱۴</sup> کوانتومی [۱۲]) آغاز شد. سپس محققین، تلاش‌های عمیق‌تری برای ترکیب منابع مخابرات کلاسیک، مخابرات کوانتومی و درهم‌تنیدگی برای فرمول‌بندی پروتکل‌های جدید کوانتومی انجام دادند.

## ۲-۲ کارهای قبلی در مورد سنتز منطقی کوانتومی

فعالیت‌های انجام‌شده در زمینه سنتز منطقی مدارهای کوانتومی را می‌توان به دو دسته مبتنی بر تجزیه و مبتنی بر ترکیب تقسیم کرد که فعالیت‌های مختلفی در هر بخش صورت گرفته است.

- در دسته اول، با استفاده از ویژگی‌های ماتریسی مدار و گیت‌های کوانتومی و نیز تعریف گیت‌های خاص و روش‌های تجزیه آنها با توجه به روش‌های تجزیه ریاضی، ماتریس مدار مورد نظر به دسته ماتریس‌های خاص که همان گیت‌های کوانتومی هستند، تجزیه می‌شود.

- در دسته دوم با استفاده از روش‌های جستجوی اکتشافی (الگوریتم‌های تکاملی)، اقدام به یافتن مداری متشکل از کتابخانه گیت‌های مورد نظر می‌شود.

در مقالات قبلی مربوط به سنتز منطقی، هدف اصلی عمدتاً کاهش تعداد گیت‌های CNOT است. در [۱۳]، مرتبه تعداد گیت‌های CNOT

7. Two-Level Unitary Matrices

8. Highest Lower Bound

9. Cosine-Sine Decomposition

10. Quantum Shannon Decomposition

11. Block-Based Quantum Decomposition

12. Improved-BQD

13. Denominator Exponent

1. David Deutsch

2. Richard P. Feynman

3. Moore's Law

4. Quantum Key Distribution

5. Quantum Teleportation

6. Dense Coding

کوانتومی، یک تبدیل خطی است که با یک ماتریس یکانی<sup>۸</sup> مؤثر بر روی فضای  $n$  کیوبیتی تعریف می‌گردد. ماتریس  $U$  یکانی است اگر  $UU^+ = I$  که  $U^+$ ، ترانپوز مزدوج ماتریس  $U$  می‌باشد. ماتریس یکانی عمومی که بر روی  $n$  کیوبیت عمل می‌کند، با نماد  $U(2^n)$  نمایش داده می‌شود.

از معروف‌ترین گیت‌های تک کیوبیتی، اعضای مجموعه پائولی هستند که از چهار عملگر زیر تشکیل شده‌اند

$$\begin{aligned} I &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Y &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ Z &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

که  $I$  تبدیل همانی<sup>۹</sup>،  $X$  گیت چرخش بیت<sup>۱۰</sup>،  $Z$  گیت چرخش فاز<sup>۱۱</sup> و  $Y$  ترکیبی از هر دو است.

از دیگر گیت‌های پرکاربرد تک کیوبیتی دیگر، گیت‌های دوران به دور محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  با زاویه  $\alpha$  هستند که به ترتیب با ماتریس‌های (۲) نمایش داده می‌شوند

$$\begin{aligned} R_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & i \sin \frac{\alpha}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ R_y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ R_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

از جمله گیت‌های تک کیوبیتی پرکاربرد دیگر، گیت‌های هادامارد<sup>۱۲</sup> (H)، گیت فاز<sup>۱۳</sup> (Phase) و گیت  $T$  است. ماتریس‌های مربوط به این گیت‌ها در (۳) آورده شده است.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{Phase} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

کوانتومی<sup>۱</sup> برای نمایش ماتریس به صورت کارا و از گیت‌های کتابخانه کلیفورد و  $T$  استفاده کرده و هدف اصلی آن، تولید مدار با تعداد حداقل گیت  $T$  است.

در [۲۹] برای بهینه‌سازی هزینه معیار NNC از بهینه‌سازی چندهدفه استفاده شده که از الگوریتم تکاملی مبتنی بر NSGA-II بهره می‌گیرد. برای این منظور، دو هدف پیشنهاد گردیده است: به حداقل رساندن تعداد گیت‌های SWAP اضافی و تعداد فرعی‌های شبکه (اندازه شبکه). چون این دو هدف با هم تناقض دارند در نتیجه، یک الگوریتم تکاملی چندهدفه مبتنی بر NSGA-II برای حل این مشکل با در نظر گرفتن این دو هدف ایجاد شده است. در [۳۰]، یک روش طراحی چندهدفه مدارهای کوانتومی مبتنی بر برنامه‌نویسی ژنتیک مطرح گردید. برای این منظور، سه هدف پیشنهاد شده است: هزینه مدار کوانتومی، هزینه نزدیک‌ترین همسایه و عمق مدار. از دیگر نوآوری‌های آن مقاله در نظر گرفتن هم‌ارزی فاز سراسری و همچنین استفاده از یک تابع برازش دومرحله‌ای را می‌توان ذکر کرد که در مرحله اول، صحت عملکرد مدار ارزیابی می‌شود. سپس معیارهای هزینه مدارهای کوانتومی، عمق و نزدیک‌ترین همسایه مجاور را مورد نظر قرار می‌دهد. نتایج اجرا بر روی مدارهای دو تا پنج کیوبیتی نشان دادند که روش مورد نظر قادر است در زمان کوتاه به یک جواب بهینه برای طراحی این مدارها بینجامد.

## ۳-۲ اصول محاسبات کوانتومی

### ۳-۲-۱ کیوبیت‌ها

حالات کوانتومی را می‌توان بر حسب بردارها و یا با نماد معروف‌تر براکت<sup>۲</sup> نمایش داد. کت‌ها همانند  $|x\rangle$  نمایشگر بردارهای ستونی هستند هستند و عموماً برای توصیف حالات کوانتومی به کار می‌روند. حالت براکت  $|x\rangle$ ، نمایشگر ترانپوز مزدوج<sup>۳</sup>  $|x\rangle$  است. حالات پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  را می‌توان به صورت  $(0,1)^T$  و  $(1,0)^T$  بیان کرد. هر ترکیبی از  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$   $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$  را می‌توان به فرم  $(\alpha, \beta)^T \in C^2$  نشان داد.  $\langle x|y\rangle$  نمایشگر ضرب داخلی<sup>۴</sup> دو بردار است. برای نمونه چون  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  عمود هستند، داریم  $\langle 0|1\rangle = 0$ . نماد  $|x\rangle\langle y|$  نشان‌دهنده ضرب خارجی<sup>۵</sup> دو بردار است.

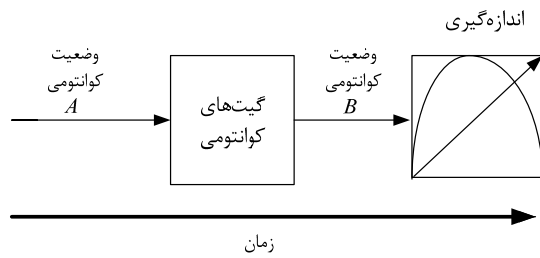
یک کیوبیت<sup>۶</sup>، برداری یکه در فضای دوبعدی مختلط است که برای این فضا، بردارهای پایه مشخص که با نماد  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  نمایش داده می‌شوند، انتخاب شده‌اند. بردارهای پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  به ترتیب هم‌تای کوانتومی بیت‌های کلاسیک ۰ و ۱ می‌باشند. برخلاف بیت‌های کلاسیک، کیوبیت‌ها می‌توانند در هر برهم‌نهی<sup>۷</sup> از  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  همانند  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  قرار بگیرند که  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلطی هستند که  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

### ۳-۲-۲ گیت‌های کوانتومی

اعمال کوانتومی را می‌توان با شبکه‌ای از گیت‌ها محقق کرد. هر گیت

8. Unitary
9. Identity
10. Bit Flip
11. Phase Flip
12. Hadamard Gate
13. Phase Rotation

1. Quantum Multiple-Valued Decision Diagram
2. Bra/Ket
3. Transpose Conjugate
4. Inner Product
5. Outer Product
6. Qubit
7. Superposition



شکل ۱: نمایش مداری گیت CNOT.

گیت معکوس‌کننده-کنترلی (CNOT)<sup>۱</sup>، یک گیت دوکیوبیتی است. کیوبیت اول در نقش کنترل و کیوبیت دوم در نقش هدف است. اگر کیوبیت کنترل،  $|1\rangle$  باشد، CNOT کیوبیت هدف را معکوس می‌کند و اگر کیوبیت کنترل،  $|0\rangle$  باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر خارج می‌شود. به عبارت دیگر، خروجی دوم، XOR کیوبیت کنترل و هدف می‌باشد. نمایش مداری گیت CNOT به صورت (۴) است

$$CNOT \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

شکل ۱، نمایش مداری گیت CNOT را نشان می‌دهد.

یک ماتریس پلکسر کوانتومی [۳۱]،  $m$  کیوبیت هدف و  $s = n - m$  کیوبیت انتخاب دارد و  $2^s$  ترکیب مختلف خطوط انتخاب، مشخص می‌کنند که چه گیت کوانتومی متفاوتی به خطوط هدف اعمال شود. در حالتی که تنها یک کیوبیت هدف (با نام  $t$ ) داریم و گیت‌های کوانتومی اعمال شده در خط هدف  $t$ ،  $Rp$  باشند،  $p \in \{x, y, z\}$  ماتریس پلکسر کوانتومی،  $Rp$  ماتریس پلکس شده نامیده می‌شود.

یک ماتریس مربعی، قطری نامیده می‌شود چنانچه درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. یک گیت قطری که بر روی  $n$  کیوبیت اعمال می‌گردد، یک ماتریس یکانی  $2^n \times 2^n$  قطری دارد و با نماد  $\Delta_n$  نمایش داده می‌شود.

### ۲-۳-۳ مدارهای کوانتومی

یک مدار کوانتومی، از مجموعه‌ای از سیم‌ها (کیوبیت‌ها) و یک توالی از گیت‌های کوانتومی تشکیل می‌گردد. محاسبات کوانتومی که با مدارهای کوانتومی مدل گردیده‌اند، در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. یک مدار کوانتومی همواره از چپ به راست ارزیابی می‌شود و بنابراین حرکت از چپ به راست در یک مدار کوانتومی به معنای حرکت به جلو در زمان است.

### ۲-۳-۴ مسئله بهینه‌سازی چندهدفه

یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه<sup>۲</sup> را می‌توان به صورت رابطه زیر فرمول‌بندی کرد

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \\ & \text{with } x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X \\ & \text{subject to } g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)) \leq 0 \\ & x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \dots, x_n \in D_n \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $x$  برداری از  $m$  متغیر و  $X$  فضای تصمیم‌گیری می‌باشد. هر مؤلفه از  $F(x)$ ، یک تابع هدف<sup>۳</sup> است و  $g(x)$  برداری از  $k$  محدودیت<sup>۴</sup> محدودیت<sup>۴</sup>

شکل ۲: محاسبات کوانتومی که با مدارهای کوانتومی مدل شده است [۳۲].

می‌باشد که یک ناحیه ممکن<sup>۵</sup>  $X_f$  را تعریف می‌کند. هر نقطه از  $x \in X_f$ ، یک جواب ممکن<sup>۶</sup> است.

طبق این تعریف، یک مسأله بهینه‌سازی مقید دارای مجموعه‌ای از متغیرها  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  است که به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی<sup>۷</sup> شناخته می‌شوند. یک تابع  $F(x)$  با نام تابع هدف بر روی متغیرهای بهینه‌سازی اعمال می‌شود و این تابع بایستی کمینه گردد. همچنین مجموعه‌ای از قیدها می‌توانند به شکل تساوی (=) یا نامساوی ( $\leq$  یا  $\geq$ ) روی متغیرهای بهینه‌سازی اعمال شوند. مجموعه‌های  $D_1, D_2, \dots, D_n$  به ترتیب به عنوان دامنه‌های متغیرهای  $x_1, x_2, \dots, x_n$  هستند که می‌توانند به عنوان قیدهای دامنه‌ای (یا محدودیت) در مسأله بهینه‌سازی مقید بیان شوند. این نکته لازم است عنوان گردد که محدودیت را می‌توان در برخی موارد به صورت قیدهای تساوی و یا نامساوی نیز بیان کرد. به عنوان مثال، محدودیت نامنفی بودن متغیر  $x_i$  را می‌توان به صورت قید نامساوی  $-x_i \leq 0$  نوشت. در بهینه‌سازی چندهدفه، هدف بهینه‌سازی هم‌زمان بیشتر از یک تابع هدف مختلف و گاه متضاد است. از روش‌های حل بهینه‌سازی چندهدفه، پیدا کردن مجموعه جواب بهینه پرتو است که در آن مجموعه جواب‌های غیر غالب در تمام فضای جستجو ارائه می‌شود. یک جواب، غیر غالب خوانده می‌شود اگر مقدار هیچ یک از توابع هدف آن نتواند بدون خراب کردن برخی دیگر از توابع هدف بهتر شود.

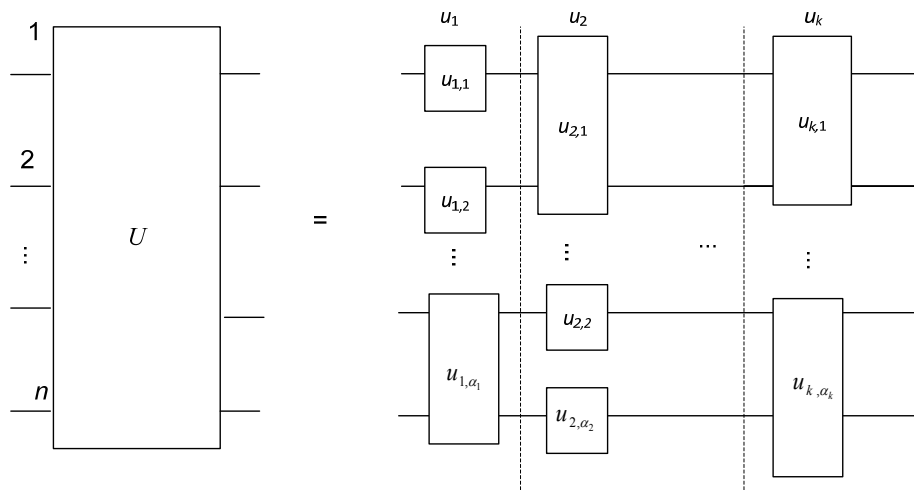
### ۲-۳-۵ سنتزهای منطقی CSD و QSD

روش‌های سنتز منطقی QSD و CSD مبتنی بر تجزیه CS هستند. روش سنتز منطقی CSD یک روش بازگشتی است که به صورت بازگشتی بر روی گیت‌های به طور یکنواخت کنترلی چندکیوبیتی اعمال می‌شود. در نهایت، حاصل تجزیه گیت کوانتومی دلخواه  $n$  کیوبیتی به صورت مداری با  $2^{n-1}$  به طور یکنواخت کنترلی تک کیوبیتی و یک گیت قطری  $\Delta_n$  است. سپس این نوع گیت‌ها به گیت‌های CNOT و تک کیوبیتی تجزیه می‌شوند.

از دیگر روش‌های سنتز منطقی بازگشتی، روش سنتز منطقی QSD است. این روش بر خلاف روش CSD در اولین گام بازگشتی، یک گیت کوانتومی دلخواه  $n$  کیوبیتی را به چهار گیت کوانتومی  $n-1$  کیوبیتی و سه گیت  $Rp$  ماتری پلکس شده، تجزیه می‌کند. سپس تجزیه QSD به طور بازگشتی بر روی چهار گیت کوانتومی  $n-1$  کیوبیتی ادامه می‌یابد تا نهایتاً گیت‌های دو کیوبیتی حاصل شوند. سپس هر گیت دو کیوبیتی توسط مدار بهینه به دست آمده در [۳۳] جایگزین می‌گردد.

4. Restriction  
5. Feasible Region  
6. Feasible Solution  
7. Optimization Variables

1. Controlled-NOT  
2. Multi-Objective Optimization Problem  
3. Object Function



شکل ۳: سنتز منطقی ماتریس یکانی نمونه \$U\$.

می‌توان مسئله سنتز منطقی این ماتریس یکانی \$U\$ به کتابخانه پایه را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی مقید چندهدفه مدل‌سازی کرد

$$\begin{aligned} & \text{Min cost } (F(x)) \\ & \text{Subject to } U - u_k \dots u_1 u_n = \cdot \\ & \text{where } u_i = u_{i,1} \otimes u_{i,2} \otimes \dots \otimes u_{i,\alpha_i} \\ & u_{i,j} \in \{\text{CNOT and one qubit gates}\}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \alpha_i \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن \$F(x)\$ مجموعه‌ای از توابع هدف است که به شرح (۸) است

$$F(x) = \{\text{depthofcircuit}(x), \text{gates}_{\text{count}(x)}, \text{CNOT}_{\text{count}(x)}\} \quad (8)$$

هدف این مسئله، بهینه‌سازی ۳ معیار ارزیابی عمق مدار، تعداد کل گیت‌ها و تعداد گیت‌های CNOT است.

در روش پیشنهادی، فضای جوابی از ترکیب‌های مختلف روش‌های تجزیه QSD و CSD ایجاد می‌شود. فضای جواب ایجاد شده، یک فضا با اندازه‌نمایی بسیار بزرگ است. سپس با استفاده از یک رهیافت پایین به بالا از روش حل برنامه‌ریزی پویای چندهدفه (MODP)، روشی ارائه می‌شود تا تنها بخشی از کل فضای جواب، برای یافتن مدارها با هزینه‌های بهینه پرتو جستجو شوند. این روش، MOQLS<sup>۵</sup> خوانده می‌شود.

برنامه‌ریزی پویای چندهدفه<sup>۶</sup> [۳۵]، روش حل مسأله برای یافتن نقاط بهینه پرتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با اعمال روش برنامه‌ریزی پویا می‌باشد. این روش حل به مسائلی قابل اعمال است که یک مسأله را می‌توان به صورت بازگشتی به زیرمسائلی شکست و بهینه پرتو بودن یک جواب به بهینه پرتو بودن جواب‌های زیرمسائل آن منجر می‌شود.

روش پیشنهادی که برای ساختن فضای جواب، در آن از ترکیب دو روش QSD و CSD استفاده می‌گردد، SSG<sup>۷</sup> خوانده می‌شود. در این روش، ماتریس \$U\$ (۴) می‌تواند با روش‌های QSD و CSD تجزیه شود. اگر \$n > 2\$ باشد، این ماتریس می‌تواند با روش CSD سنتز منطقی گردد. همچنین می‌تواند یک گام با روش سنتز منطقی بازگشتی QSD تجزیه شود که در این صورت، سه گیت مالتی‌پلکس شده \$R\_p\$ (\$p \in \{y, z\}\$) روی \$n\$ کیوبیت و چهار ماتریس \$U(2^{n-1})\$ تولید می‌شود. روش SSG به طور بازگشتی بر روی هر یک از ماتریس‌های \$U(2^{n-1})\$ اجرا می‌گردد.

### ۲-۳-۶ معیارهای ارزیابی مدار کوانتومی

- **تعداد گیت‌های تک‌کیوبیتی و CNOT:** تعداد گیت‌هایی که برای سنتز منطقی مورد استفاده قرار می‌گیرند، معیاری برای ارزیابی روش‌های سنتز منطقی است. به طور کلی بر اساس کتابخانه‌های تعریف‌شده، در مدارهای کوانتومی این هزینه شامل گیت‌های تک‌کیوبیتی و گیت CNOT تولیدشده است.

- **هزینه کل گیت‌ها:** این معیار برابر با تعداد کل گیت‌های تولیدشده در روش سنتز منطقی مدارهای کوانتومی است.

- **عمق مدار:** گیت‌های پایه‌ای که در یک مدار کوانتومی می‌توانند با هم اجرا شوند به عنوان یک سطح منطقی<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شوند [۳۴]. تعداد سطوح منطقی یک مدار، عمق منطقی<sup>۲</sup> مدار نامیده می‌شود. عمق یک مدار کوانتومی \$C\$ (نشان داده شده با \$D\_c\$)، می‌تواند از (۶) به دست آید که در آن \$T\_c\$ تعداد کل گیت‌ها و \$P\_c\$ تعداد گیت‌هایی را که در مدار \$C\$ موازی هستند نشان می‌دهد

$$D_c = T_c - P_c \quad (6)$$

### ۳- روش پیشنهادی

در این بخش، یک روش پیشنهادی برای سنتز منطقی چندهدفه با هدف بهبود معیارهای ارزیابی مطرح می‌شود.

### ۳-۱ سنتز منطقی چندهدفه مدارهای کوانتومی

به طور رسمی، مسئله سنتز منطقی چندهدفه<sup>۳</sup> در مدل مداری کوانتومی کوانتومی را با استفاده از کتابخانه پایه به صورتی که در ادامه می‌آید، مدل‌سازی می‌کنیم. برای مثال، شکل ۳ را یک مدار نمونه حاصل از سنتز منطقی ماتریس یکانی \$U\$ روی \$n\$ کیوبیت متشکل از گیت‌های \$u\_{i,j}\$ در نظر بگیریم که در آن \$i\$ (\$1 \leq i \leq k\$)، شماره سطح منطقی هر گیت و \$j\$ (\$1 \leq j \leq \alpha\_i\$) شماره آن گیت در آن سطح منطقی را نشان می‌دهد. گیت‌های پایه‌ای که در یک مدار کوانتومی می‌توانند با هم اجرا گردند به عنوان یک سطح منطقی در نظر گرفته می‌شوند. پارامتر \$k\$ برابر با تعداد کل سطوح منطقی (عمق) مدار است و \$\alpha\_i\$ تعداد کل گیت‌ها در سطح منطقی \$i\$ ام را نشان می‌دهد.

4. Depth of Circuit

5. Multi-Objective Quantum Logic Synthesis

6. Multi-Objective Dynamic Programming

7. Solution Space Generator

1. Logical Level

2. Logical Depth

3. Multi-Objective Logic Synthesis

$$m = \begin{cases} \cdot & \text{if } QSD \\ r_{n-1} & \text{if } CSD \\ i \times r_{n-1}^r + j \times r_{n-1}^z + k \times r_{n-1} + l & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

که  $l, k, j, i \in \{0, 1, \dots, r_{n-1} - 1\}$  به ترتیب حاوی اندیس چهار ماتریس  $U(\mathcal{Y}^{n-1})$  از سمت چپ به سمت راست مدار هستند و خود از رابطه بازگشتی (۱۰) به دست می‌آیند. در واقع  $m$  عددی است که از تبدیل عدد  $(ijkl)_{r_{n-1}}$  به مبنای ۱۰ حاصل می‌شود. اگر  $U(\mathcal{Y}^n)$  داده شده با روش QSD سنتز منطقی شود، اندیس صفر می‌گیرد. اگر این ماتریس یکانی با روش CSD سنتز منطقی شود، اندیس آن به صورت  $r_{n-1}$  در نظر گرفته می‌شود. در غیر این صورت، یک مرحله تجزیه بازگشتی QSD اعمال شده و ۳ گیت مالتی‌پلکس شده  $R_p$  ( $p \in \{y, z\}$ ) روی  $n$  کیوبیت و چهار ماتریس  $U(\mathcal{Y}^{n-1})$  تولید می‌شود و اندیس این مدار  $(m)$  با استفاده از رابطه بازگشتی (۳) به دست می‌آید.

مداری که در روش SSG برای سنتز منطقی ماتریس‌های غیر ابتدایی بر روی  $n$  کیوبیت تولید می‌شود و اندیسی برابر با  $m$  دارد،  $S'_{n,m}$  خوانده می‌شود.

به منظور مشخص کردن نحوه تجزیه یک مدار مشخص در فضای جواب این روش، اندیس آن  $(m)$  و تعداد کیوبیت‌هایی که آن مدار بر آن اثر می‌کند  $(n)$ ، باید داده شوند و الگوریتم بازگشتی شکل ۴ مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تابع، یک ورودی به نام  $f$  نیز دارد که ابتدایی  $(f=0)$  یا غیر ابتدایی  $(f=1)$  بودن ماتریس فراخواننده این الگوریتم را که قرار است تجزیه شود، نشان می‌دهد. قابل ذکر است که فرض می‌شود مقادیر  $r_n$  به ازای  $n$ ‌های مختلف از قبل در حافظه ذخیره شده‌اند. همچنین دو تابع  $\text{div}(a,b)$  و  $\text{mod}(a,b)$  به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم صحیح عدد  $a$  بر  $b$  را برمی‌گردانند.

قابل ذکر است که  $Q_n()$  و  $QSD_n()$  به ترتیب به منزله اعمال یک مرتبه الگوریتم بازگشتی تجزیه QSD برای سنتز منطقی ماتریس‌های ابتدایی و غیر ابتدایی  $U(\mathcal{Y}^n)$  است و ۴ ورودی داخل آن، به ترتیب نحوه تجزیه ۴ ماتریس  $U(\mathcal{Y}^{n-1})$  را از سمت چپ به راست مشخص می‌کنند. در اولین بار فراخوانی تابع به منظور تجزیه یک ماتریس  $n$  کیوبیتی،  $f=1$  است. اگر ماتریس متناظر در فراخوانی این الگوریتم، خود ابتدایی باشد و یک گام با روش سنتز منطقی بازگشتی QSD تجزیه شود، آن گاه سمت راست‌ترین ماتریس تولیدشده توسط آن ابتدایی است، یعنی  $f$  آن برابر با یک خواهد بود. برای مثال فرض کنید که  $m=4793$  و  $n=4$  باشد. با استفاده از رابطه بازگشتی (۹)، مقادیر  $r_4=17$ ،  $r_3=2$  و  $r_2=83522$  محاسبه گردیده و مورد استفاده قرار خواهند گرفت. تابع ارائه شده در شکل ۴، شرط‌های داخل خطوط ۱ تا ۱۰ را چک کرده و هیچ کدام ارضا نمی‌شوند. سپس در خطوط ۱۱ تا ۱۴،  $l, k, j$  و  $i$  به ترتیب به صورت ۱۶، ۹، ۱۶ و ۰ محاسبه می‌شوند. روند بازگشتی فوق با ورودی‌های  $(3,0,0)$ ،  $(3,16,0)$ ،  $(3,16,0)$  و  $(3,16,1)$  دوباره فراخوانی می‌شود. نهایتاً با به انتها رسیدن روند بازگشتی فوق، تجزیه این مدار به شکل  $(CSD_r, CSD_r, CSD_r, CSD_r, CSD_r, CSD_r, CSD_r, CSD_r)$  محاسبه خواهد شد. همچنین برای محاسبات هزینه که در ادامه آمده است، احتیاج به مشخص کردن نوع ماتریس‌های غیر ابتدایی در مجموعه جواب نیز است. این نوع با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۱) به دست می‌آید

$$type_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 0 \\ n & \text{if } m = r_n - 1 \\ type_{n-1,l} & \text{if } 0 < m < r_n - 1 \end{cases} \quad (11)$$

Decomp( $n, m, f$ )

1. if  $f = 0$
2. if  $m = 0$
3. return  $Q_n$
4. elseif  $m = r_{n-1}$
5. return  $C_n$
6. if  $f = 1$
7. if  $m = 0$
8. return  $QSD_n$
9. elseif  $m = r_{n-1}$
10. return  $CSD_n$
11.  $l = \text{mod}(m, r_{n-1})$
12.  $k = \text{mod}(\text{div}(m, r_{n-1}), r_{n-1})$
13.  $j = \text{mod}(\text{div}(\text{div}(m, r_{n-1}), r_{n-1}), r_{n-1})$
14.  $i = \text{div}(\text{div}(\text{div}(m, r_{n-1}), r_{n-1}), r_{n-1})$
15. if  $f = 0$
16. return  $QSD_n(\text{decomp}(n-1, i, 0), \text{decomp}(n-1, j, 0), \text{decomp}(n-1, k, 0), \text{decomp}(n-1, l, 1))$
17. return  $Q_n(\text{decomp}(n-1, i, 0), \text{decomp}(n-1, j, 0), \text{decomp}(n-1, k, 0), \text{decomp}(n-1, l, 0))$

شکل ۴: الگوریتم بازگشتی پیشنهادی سنتز منطقی.

ماتریس‌های یکانی تولیدگردیده به دو کلاس ابتدایی و غیر ابتدایی به روشی که در ادامه توضیح داده شده است، افزاز می‌شوند. اگر خود ماتریس  $U(\mathcal{Y}^k)$  یک ماتریس ابتدایی باشد (در اولین بار فراخوانی این روش، ماتریس ابتدایی است)، به سمت راست‌ترین ماتریس  $U(\mathcal{Y}^{k-1})$ ، ماتریس ابتدایی و به بقیه ماتریس‌ها، ماتریس‌های غیر ابتدایی گفته می‌شود. سه گیت مالتی‌پلکس شده  $R_p$  ( $p \in \{y, z\}$ ) روی  $n$  کیوبیت نیز به کتابخانه ابتدایی تجزیه می‌شوند.

پس از تجزیه این گیت‌ها، بهینه‌سازی‌هایی نیز در آنها انجام می‌شود. این بهینه‌سازی‌ها مبتنی بر امکان رد کردن گیت‌های قطری ابتدایی در تمام ماتریس‌های غیر ابتدایی از خطوط انتخاب گیت‌های مالتی‌پلکس شده به سمت چپ و الحاق آنها به مدارهایی در طرف دیگر است. تعداد حالت‌های کلی فضای جواب تولیدشده توسط روش SSG از رابطه بازگشتی (۹) به دست می‌آید

$$r_n = \begin{cases} 2 & \text{if } n = 2 \\ r_{n-1}^f + 1 & \text{if } n > 2 \end{cases} \quad (9)$$

دو روش برای سنتز منطقی مدارهای دو کیوبیتی وجود دارد. برای سنتز منطقی مدارهایی با  $n > 2$ ، اگر یک گام روش تجزیه QSD اعمال شود، چهار ماتریس  $U(\mathcal{Y}^{n-1})$  تولید می‌شوند که هر یک برای سنتز منطقی، تعداد  $r_{n-1}$  حالت مختلف می‌توانند داشته باشند. لذا تعداد حالت‌های کل،  $r_{n-1}^4$  خواهد بود. اگر مدار با روش CSD تجزیه شود، یک حالت به تعداد حالت‌های فضای جواب اضافه می‌کند.

به هر مدار  $n$  کیوبیتی در فضای جواب تولیدشده با روش SSG که ماتریس‌های یکانی غیر ابتدایی را پیاده‌سازی می‌کند، با یک تابع یک‌به‌یک، اندیسی تخصیص می‌یابد و این مدار  $S_{n,m}$  خوانده می‌شود.

اندیس  $m$  که تابعی از  $n$  است و از صفر تا  $r_{n-1}$  تغییر می‌کند، به صورت (۱۰) محاسبه می‌شود. علی‌رغم آن که این اندیس تابعی از  $n$  است، به علت ساده‌نوشتن، معیار  $n$  به صراحت در آن ذکر نمی‌شود

می‌آیند. در نتیجه، تعداد کلی گیت‌های تک کیوبیتی با جمع کردن گیت‌های تک کیوبیتی در این چهار ماتریس  $U(2^{n-1})$  تولیدشده به علاوه تعداد گیت‌های تک کیوبیتی در گیت‌های مالتی پلکس شده  $R_p(p \in \{y, z\})$  به دست می‌آید. تعداد گیت‌های تک کیوبیتی در گیت‌های مالتی پلکس شده  $R_p(p \in \{y, z\})$  برابر  $2 \times 2^{n-1} - 2$  است.

رابطه بازگشتی (۱۵)، تعداد گیت‌های  $g$  تولیدشده در یک مدار  $S'_{n,m}$  را حساب می‌کند

$$g'_{n,m} = \begin{cases} g_{n,m} - 3 & \text{if } type_{n,m} = 1 \\ g_{n,m} - (2^{type_{n,m}} - type_{n,m} - 1) & \text{if } type_{n,m} \geq 2 \end{cases} \quad (15)$$

مقدار این کاهش از روی  $type$  این ماتریس به دست می‌آید که در رابطه بازگشتی (۱۱) محاسبه شده است. اگر  $type = 1$  باشد، یعنی این ماتریس با روش  $Q_k$  برای یک  $(2 \leq k \leq n)$  سنتز شده و چون اختلاف تعداد گیت‌های  $g$  در ماتریس‌های ابتدایی و غیر ابتدایی تولیدشده در روش سنتز  $QSD_k$  با  $Q_k$  برابر با سه است، در غیر این صورت، آخرین ماتریس یکانی تولیدشده برای این مدار با روش  $CSD_{type_{n,m}}$  سنتز شده و در نتیجه اختلاف بین  $g'_{n,m}$  و  $g_{n,m}$  برابر با تعداد گیت‌های تک کیوبیتی که با روش  $CSD_{type_{n,m}}$  تولید می‌شوند خواهد بود و برابر با  $2^{type_{n,m}} - 1 - type_{n,m}$  است.

رابطه (۱۶) مجموع کلی گیت‌های تولیدشده به این روش را که از جمع (۱۲) با (۱۴) به دست آمده است، نشان می‌دهد

$$T_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 2, m = 0 \\ 2^n - n - 3 & \text{if } n \geq 2, m = r_n - 1 \\ T'_{n-1,i} + T'_{n-1,j} + T'_{n-1,k} + T_{n-1,l} + 6 \times 2^{n-1} - 3 & \text{if } n \geq 3, 0 < m < r_n - 1 \end{cases} \quad (16)$$

رابطه بازگشتی (۱۷)،  $T'_{n,m}$  را حساب می‌کند

$$T'_{n,m} = \begin{cases} T_{n,m} - 2 & \text{if } type_{n,m} = 1 \\ T_{n,m} - (2 \times 2^{type_{n,m}} - type_{n,m} - 4) & \text{if } type_{n,m} \geq 2 \end{cases} \quad (17)$$

### ۳-۲-۳ عمق مدار

مطابق (۶) فرمول محاسبه عمق مدار- باید تعداد گیت‌های موازی را به دست آورد. از آنجایی که تعداد  $2 - 2^n$  گیت تک کیوبیتی در یک مدار تجزیه‌شده با روش  $CSD_n$  وجود دارند که می‌توانند موازی با بقیه مدار اجرا شوند، پس رابطه بازگشتی عمق مدار کوانتومی به صورت (۱۸) است

$$D_{n,m} = \begin{cases} 7 & \text{if } n = 2, m = 0 \\ 4^n - 2^n - n - 2 & \text{if } n \geq 3, m = r_n - 1 \\ D'_{n-1,i} + D'_{n-1,j} + D'_{n-1,k} + D_{n-1,l} + 3 \times 2^n - 2 & \text{if } n \geq 3, 0 < m < r_n - 1 \end{cases} \quad (18)$$

مشابه با  $g_{n,m}$ ، وقتی در رابطه  $m < r_{n-1}$  یک مرحله تجزیه بازگشتی QSD اعمال گردیده است، چهار ماتریس یکانی  $U(2^{n-1})$  و سه گیت مالتی پلکس شده  $R_p(p \in \{y, z\})$  تولید می‌شوند. عمق‌های ماتریس‌های یکانی  $U(2^{n-1})$  غیر ابتدایی و ابتدایی به ترتیب با  $D'_{n-1,t}$ ،  $t \in \{i, j, k\}$  و  $D_{n-1,l}$  نشان داده می‌شوند که  $i, j, k$  و  $l$  مشابه با حالت قبل هستند. در نتیجه، عمق کلی مدار با جمع عمق این چهار ماتریس  $U(2^{n-1})$  به علاوه عمقی که به علت گیت‌های مالتی پلکس شده  $R_p(p \in \{y, z\})$  به وجود می‌آید، محاسبه می‌شود.

رابطه بازگشتی (۱۹) عمق مربوط به یک مدار  $S'_{n,m}$  را حساب می‌کند

اگر  $0 < m < r_{n-1}$  باشد (یعنی در سنتز منطقی یک مرحله QSD اعمال شده باشد)، سپس نوع ماتریس از روی  $m, l$ ، یعنی اندیس سمت راست‌ترین ماتریس یکانی تولیدشده پس از اعمال یک مرحله تجزیه QSD به دست می‌آید و سپس (۱۱) به طور بازگشتی با  $n-1$  و  $l$  ادامه می‌یابد تا  $n$  به  $k$  و  $l$  به  $0$  یا  $r_{k-1}$  برسد که در این حالت نوع این مدار به صورت  $1$  یا  $k$  که به ترتیب به منزله تجزیه ماتریس ابتدایی با  $QSD_k$  یا  $CSD_k$  است، محاسبه می‌شود.

### ۳-۲-۳ ارزیابی هزینه

به منظور بررسی ارزیابی هزینه، حد بالایی سه معیار تعداد CNOT، عمق مدار کوانتومی و تعداد کل گیت‌ها در میان جواب‌های تولیدشده در فضای جواب SSG مورد بررسی قرار می‌گیرند.

#### ۳-۲-۳-۱ تعداد CNOT

رابطه بازگشتی (۱۲) تعداد گیت‌های CNOT را که روش پیشنهادی برای یک مدار  $S_{n,m}$  تولید می‌کند، نشان می‌دهد

$$CNOT_{n,m} = \begin{cases} 3 & \text{if } n = 2, m = 0 \\ \frac{1}{4} 4^n - 2^{n-1} - 2 & \text{if } n \geq 3, m = r_n - 1 \\ CNOT'_{n-1,i} + CNOT'_{n-1,j} + CNOT'_{n-1,k} + CNOT_{n-1,l} + 2 \times 2^{n-1} - 1 & \text{if } n \geq 3, 0 < m < r_n - 1 \end{cases} \quad (12)$$

که در آن  $i, j, k$  و  $l$  مشابه با حالت قبل هستند. لازم به ذکر است که عبارت  $3 \times 2^{n-1} - 1$  در (۱۲)، تعداد گیت‌های CNOT مربوط به کوانتوم مالتی پلکس‌های میانی را نشان می‌دهد. رابطه بازگشتی (۱۳)، تعداد گیت‌های CNOT تولیدشده در یک مدار  $S'_{n,m}$  را حساب می‌کند

$$CNOT'_{n,m} = \begin{cases} CNOT_{n,m} - 1 & \text{if } type_{n,m} = 1 \\ CNOT_{n,m} - (2^{type_{n,m}} - 3) & \text{if } type_{n,m} \geq 2 \end{cases} \quad (13)$$

#### ۳-۲-۳-۲ هزینه کل گیت‌ها

برای محاسبه تعداد کل گیت‌های یک مدار کوانتومی، ابتدا تعداد گیت‌های تک کیوبیتی محاسبه می‌شود. رابطه بازگشتی (۱۴) به منظور ارزیابی حداکثر تعداد گیت‌های تک کیوبیتی که این روش برای هر مدار  $S_{n,m}$  تولید می‌کند، استفاده می‌شود

$$g_{n,m} = \begin{cases} 7 & \text{if } n = 2, m = 0 \\ \frac{1}{2} 4^n + 2^{n-1} - n - 1 & \text{if } n \geq 2, m = r_n - 1 \\ g'_{n-1,i} + g'_{n-1,j} + g'_{n-1,k} + g_{n-1,l} + 3 \times 2^{n-1} - 2 & \text{if } n \geq 3, m < r_n - 1 \end{cases} \quad (14)$$

اگر ماتریس  $U(2^n)$  داده شده با روش  $CSD_n$  تجزیه شود، آن گاه تعداد گیت‌های تک کیوبیتی تولیدشده در آن،  $4^n + 2^{n-1} - n - 1$  است. در غیر این صورت، اگر در  $(10)$   $m < r_{n-1}$  باشد (یعنی یک مرحله روش سنتز QSD اعمال شده باشد)، آن گاه چهار ماتریس  $U(2^{n-1})$  و سه گیت مالتی پلکس شده  $R_p(p \in \{y, z\})$  تولید می‌شوند. تعداد گیت‌های تک کیوبیتی در ماتریس‌های غیر ابتدایی و ابتدایی  $U(2^{n-1})$  به ترتیب با  $g'_{n-1,t}$ ،  $t \in \{i, j, k\}$  و  $g_{n-1,l}$  نشان داده می‌شوند.  $i, j, k$  و  $l$  به ترتیب اندیس چهار ماتریس  $U(2^{n-1})$  از سمت چپ به سمت راست مدار هستند و با استفاده از دستورهای ۱۱ تا ۱۴ از الگوریتم شکل ۴ به دست

MOQLS( $n$ )

- 1:  $PO_2 \leftarrow \{S_{2,0}\}$
- 2: **if**  $n = 2$
- 3:     **then return**  $PO_2$
- 4:  $M_2 = \{0\}$
- 5:  $M'_2 = \{0\}$
- 6: **for count**  $\leftarrow 3$  **to**  $n$
- 7:      $MC \leftarrow \{(ijkl)_{count-1}, i, j, k \in M'_{count}, l \in M_{count}\}$
- 8: **for all**  $m \in MC$
- 9:     **if**  $S_{count,m}$  has Pareto-optimal costs //if  $S'_{count,m}$  is not dominated  
by all  $S_{count,mc}, mc \in MC$
- 10:     **then**  $PO_{count} \leftarrow PO_{count} \cup \{S_{n,m}\}$
- 11:      $M_{count} \leftarrow M_{count} \cup \{m\}$
- 12:     **if**  $S'_{count,m}$  has Pareto-optimal costs //if  $S'_{count,m}$  is not dominated  
by all  $S'_{count,mc}, mc \in MC$
- 13:     **then**  $PO_{count} \leftarrow PO_{count} \cup \{S'_{n,m}\}$
- 14:      $M'_{count} \leftarrow M'_{count} \cup \{m\}$
- 15:      $M_{count} \leftarrow M_{count} \cup \{r_{count-1}\}$
- 16:      $M'_{count} \leftarrow M'_{count} \cup \{r_{count-1}\}$
- 17: **return**  $PO_n$

شکل ۵: الگوریتم پیشنهادی MOQLS.

$2 \leq n \leq 5$  نشان می‌دهد. قابل ذکر است که در مورد مدارهای تولیدشده توسط روش SSG که هزینه یکسان دارند، مدارهایی با کوچک‌ترین اندیس ممکن در نظر گرفته می‌شوند.

### ۳-۳ الگوریتم MOQLS

الگوریتم MOQLS به منظور تولید مدارات با بهترین جواب‌ها در فضای جواب ایجادشده با روش تولید فضای جواب SSG (جواب‌های با هزینه‌های بهینه پرتو) روی  $n$  کیوبیت، با استفاده از یک رهیافت مبتنی بر برنامه‌ریزی پویا، به صورت پایین به بالا با شروع از دو کیوبیت، جواب‌های بهینه پرتو را تولید می‌کند تا به  $n$  مورد نظر برسد (شکل ۵).  
**قضیه ۱:** الگوریتم MOQLS تمام مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتوی سنتز منطقی چندهدفه را در فضای جواب تشکیل‌شده با روش SSG تولید می‌کند.

**اثبات:** به سادگی می‌توان دید که به ازای  $n=2$ ، مدار  $S_{r_2}$  (که روش تجزیه آن QSD است) هزینه بهینه پرتو دارد و لذا در مجموعه جواب تولیدشده توسط روش MOQLS قرار می‌گیرد. حال مدارهای با هزینه‌های بهینه پرتو روی  $n$  کیوبیت ( $n \geq 3$ )، یعنی  $PO_n$  و یک عضو دلخواه از این مجموعه را با نام  $S_{n,u}$  در نظر بگیرید. اگر  $u = r_{n-1}$  باشد، یعنی این مدار با روش CSD تجزیه شده است، آن گاه این مدار هزینه‌های بهینه پرتو دارد، لذا در این مجموعه قرار داده شده است. اگر  $u < r_{n-1}$  باشد، اثبات با برهان خلف انجام می‌گیرد. فرض کنید  $u$  در پایه  $r_{n-1}$  به صورت  $u = (ijkl)_{n-1}$  نوشته شود و حداقل یک رقم مانند  $i$  در این عدد وجود داشته باشد که  $S'_{n-1,i}$  هزینه‌های غیر بهینه پرتو دارد. در نتیجه حداقل یک مدار  $S'_{n-1,v}$  وجود دارد که حداقل یکی از هزینه‌های آن مانند  $c_v$ ، کوچک‌تر از هزینه متناظر در  $S'_{n-1,i}$  است و هزینه‌های دیگر آن نیز از هزینه متناظر در  $S'_{n-1,i}$  کوچک‌تر یا مساوی است. اگر این مدار به جای  $S'_{n-1,i}$  در نظر گرفته شود، به مدار دیگر  $n$  کیوبیتی مانند  $S_{n,w}$  می‌انجامد که هزینه  $c_w$  آن از هزینه  $c_v$  مربوط به  $S_{n,u}$  کوچک‌تر و هزینه‌های دیگر آن نیز از هزینه‌های  $S_{n,u}$  کوچک‌تر

جدول ۱: مقایسه بین  $st_n$  و  $r_n$  به ازای  $2 \leq n \leq 5$ .

$n$	۲	۳	۴	۵
$r_n$	۲	۱۷	۸۳۵۲۲	$۴,۸۶۶۴ \times 10^{11}$
$st_n$	۲	۹	۵۲۶۶	$۷,۶۸۷ \times 10^{12}$

$$D'_{n,m} = \begin{cases} D_{n,m} - 3 & \text{if } type_{n,m} = 1 \\ D_{n,m} - (2 \times 2^{type_{n,m}} - type_{n,m} - 3) & \text{if } type_{n,m} \geq 2 \end{cases} \quad (19)$$

مشابه با حالت قبل، وقتی  $type_{n,m} = 1$  باشد، آن گاه اختلاف بین  $D'_{n,m}$  و  $D_{n,m}$  برابر با سه محاسبه می‌شود. در غیر این صورت، اختلاف بین  $D'_{n,m}$  و  $D_{n,m}$  برابر با عمق مربوط با  $\Delta_{type_{n,m}}$  است. این عمق می‌تواند با استفاده از کم کردن تعداد گیت‌های موازی در آن، یعنی تعداد کیوبیت‌های آن ( $type_{n,m}$ ) از مجموع کل گیت‌های آن به دست آید.

### ۳-۲-۴ تحلیل اندازه فضای جواب

همان طور که گفته شد، روش SSG به تعداد نمایی بسیار بزرگی از حالات مختلف برای تجزیه می‌انجامد. قابل توجه است که در فرمول‌های بازگشتی ارائه‌شده (روابط (۱۲)، (۱۶) و (۱۸))، هزینه از جمع چهار هزینه محاسبه می‌شود. با استفاده از جابجایی جمع، مشخص است که تعداد زیادی از این حالت‌ها به یک هزینه یکسان کوانتومی می‌انجامد و تنها یکی از آن ترکیب‌ها می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. به طور خاص‌تر، حداکثر تعداد حالت‌های با هزینه مختلف کوانتومی با رابطه بازگشتی (۲۰) محاسبه می‌شود

$$st_n = \begin{cases} 2 & \text{if } n = 2 \\ \begin{cases} st_{n-1} + st_{n-1} \times (st_{n-1} - 1) \times (st_{n-1} - 2) \\ + st_{n-1} \times (st_{n-1} - 1) \end{cases} \times st_{n-1} + 1 & \text{if } n > 2 \end{cases} \quad (20)$$

برای محاسبه این امر به بیان دیگر، مسأله را به فرم  $S = a + b + c + d$  در نظر بگیرید و فرض کنید که  $a$ ،  $b$  و  $c$  هر کدام  $k$  مقدار متمایز و  $d$  نیز  $k'$  مقدار متمایز دیگر می‌تواند داشته باشد. در ادامه محاسبه می‌کنیم که  $S$  حداکثر چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد.  $S = a + b + c$  تعریف می‌کنیم و مشخص است که  $S = S' + d$ . تعداد حالات مختلف  $S'$  را  $Sn'$  در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان بررسی کرد که تعداد حالات مختلف  $S$  (یعنی  $Sn$ ) برابر خواهد بود با  $Sn' \times k'$ . تعداد حالات مختلف  $S'$  نیز می‌تواند به ۳ حالت زیر افزایش یابد:

(۱)  $a$ ،  $b$  و  $c$  هر سه برابر هستند. در این صورت تعداد حالت‌ها برابر با  $k$  خواهد بود.

(۲)  $a$ ،  $b$  و  $c$  هر سه متمایز هستند. در این صورت تعداد حالت‌ها برابر با جایگشت ۳ از  $k$  یعنی  $k(k-1)(k-2)$  خواهد بود.

(۳) دقیقاً دو تا از مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر و یکی متمایز است. در این صورت تعداد حالت‌ها برابر با جایگشت ۲ از  $k$  یعنی  $k(k-1)$  خواهد بود.

با این توضیحات،  $Sn$  به صورت (۲۱) محاسبه می‌شود

$$Sn = (k + k \times (k-1) \times (k-2) + k \times (k-1)) \times k' \quad (21)$$

قابل ذکر است که در محاسبه تعداد حالات مختلف فضای جواب (یعنی  $st_n$ )،  $k = k'$  و برابر با  $st_{n-1}$  است. با اضافه کردن یک حالت بیشتر به علت روش سنتز CSD، این تعداد به صورت (۲۰) محاسبه می‌شود. جدول ۱، مقایسه بین تعداد حالات کل ( $r_n$ ) و  $st_n$  را به ازای



جدول ۴: مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتو تولیدشده با روش سنتز MOQLS در فضای جواب ایجادشده توسط روش SSG برای  $n = 4$ .

عمق	تعداد کل گیت‌ها	تعداد CNOT	تجزیه
۲۰۱	۲۵۹	۱۰۰	$QSD_4$
۲۱۱	۲۶۲	۱۰۶	$QSD_4(Q_+, Q_-, C_+, QSD_4)$
۲۲۱	۲۶۵	۱۱۲	$QSD_4(Q_+, Q_-, C_+, QSD_4)$
۲۳۱	۲۶۸	۱۱۸	$QSD_4(C_+, C_+, C_+, QSD_4)$
۲۴۱	۲۷۱	۱۲۴	$QSD_4(C_+, C_+, C_+, QSD_4)$
۲۳۴	۲۴۹	۱۱۸	$QSD_4$

جدول ۲: مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتو تولیدشده با روش سنتز MOQLS در فضای جواب ایجادشده توسط روش SSG برای  $n = 2$ .

تجزیه	تعداد CNOT	تعداد کل گیت‌ها	عمق
$QSD_2$	۳	۱۰	۷

جدول ۳: مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتو تولیدشده با روش سنتز MOQLS در فضای جواب ایجادشده توسط روش SSG برای  $n = 3$ .

تجزیه	تعداد CNOT	تعداد کل گیت‌ها	عمق
$QSD_3$	۲۰	۵۵	۴۱
$CSD_3$	۲۶	۵۸	۵۱

جدول ۵: مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتو تولیدشده با روش سنتز MOQLS در فضای جواب ایجادشده توسط روش SSG برای  $n = 5$ .

تجزیه	تعداد CNOT	تعداد کل گیت‌ها	عمق
$QSD_5$	۴۴۴	۱۱۲۳	۸۸۹
$QSD_5(Q_+, Q_-, Q_+, Q_+, Q_+, C_+, Q_+, QSD_5)$	۴۵۰	۱۱۲۶	۸۹۹
$QSD_5(Q_+, Q_-, Q_+, Q_+, Q_+, C_+, Q_+, QSD_5)$	۴۵۶	۱۱۲۹	۹۰۹
$QSD_5(Q_+, Q_-, C_+, QSD_5)$	۴۶۲	۱۱۱۳	۹۲۲
$QSD_5(Q_+, Q_-, Q_+, Q_+, Q_+, C_+, Q_+, QSD_5)$	۴۶۸	۱۱۱۶	۹۳۲
$QSD_5(Q_+, Q_+, Q_+, Q_+, Q_+, C_+, Q_+, QSD_5)$	۴۷۴	۱۱۱۹	۹۴۲
$QSD_5(Q_+, C_+, C_+, QSD_5)$	۴۸۰	۱۱۰۳	۹۵۵
$QSD_5(Q_+, Q_+, Q_+, Q_+, Q_+, C_+, C_+, QSD_5)$	۴۸۶	۱۱۰۹	۹۶۵
$QSD_5(Q_+, Q_+, Q_+, Q_+, Q_+, C_+, C_+, QSD_5)$	۴۹۲	۱۱۰۹	۹۷۵
$QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5)$	۴۹۸	۱۰۹۳	۹۸۸
$QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5(Q_+, Q_+, C_+, QSD_5))$	۵۰۴	۱۰۹۶	۹۹۸
$QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5(Q_+, Q_+, C_+, QSD_5))$	۵۱۰	۱۰۹۹	۱۰۰۸
$QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5))$	۵۱۶	۱۱۰۲	۱۰۱۸
$QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5))$	۵۲۲	۱۱۰۵	۱۰۲۸
$QSD_5(C_+, C_+, C_+, QSD_5)$	۵۱۶	۱۰۸۳	۱۰۲۱
$QSD_5$	۴۹۴	۱۰۱۶	۹۸۵

### ۵- جمع‌بندی و پیشنهادهایی برای کارهای آتی

در این مقاله، یک روش سنتز منطقی چندهدفه مدارهای کوانتومی با هدف بهبود معیارهای ارزیابی مدار (تعداد CNOT، تعداد کل گیت‌ها و عمق مدار) معرفی شد که مبتنی بر ترکیبی از دو روش سنتز منطقی CSD و QSD در مدل محاسباتی مداری در جهت بهبود معیارهای ارزیابی مدار برای تولید مدار بهینه است. در روش پیشنهادی، فضای جوابی از ترکیب‌های مختلف این دو روش سنتز ایجاد می‌شود. فضای جواب ایجادشده، یک فضا با اندازه‌نمایی بسیار بزرگ است. سپس با استفاده از یک رهیافت پایین به بالا از روش حل برنامه‌ریزی پویای چندهدفه، روشی ارائه شد تا تنها بخشی از کل فضای جواب، برای یافتن مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتو جستجو شوند و نشان داده شد که این روش می‌تواند نتایج موازنه‌ای از لحاظ این سه معیار ارزیابی مدار نسبت به روش‌های قبلی ارائه‌شده تولید کند. هر یک از پاسخ‌های تولیدشده، با توجه به قیدهایی که تکنولوژی‌های ساخت کوانتومی دارند می‌توانند حائز اهمیت باشند. به عنوان یک کار آتی در این زمینه، یک روش سنتز چندهدفه آگاه از تحمل‌پذیری اشکال که مبتنی بر روش سنتز پیشنهادی برای کتابخانه کلیفورد  $T +$  است، در حال بررسی می‌باشد.

یا مساوی است. لذا مدار  $S_{n,w}$  بر مدار  $S_{n,u}$  غالب است که با بهینه پرتو بودن  $S_{n,u}$  در تناقض می‌باشد.

### ۴- نتایج

جداول ۲ تا ۵ مدارهای کوانتومی با هزینه‌های بهینه پرتو تولیدگردیده را توسط روش سنتز MOQLS در فضای جواب ایجادشده توسط روش SSG برای  $2 \leq n \leq 5$  به همراه تجزیه‌های مربوط نشان می‌دهند. این جداول بیان می‌کنند که با استفاده از یک رهیافت پایین به بالای روش برنامه‌ریزی پویای چندهدفه، چگونه این مسأله می‌تواند حل شود. روش ارائه‌شده فضای جواب بزرگ‌تری را نسبت به تمام روش‌های CSD [۱۷]، QSD [۱۸]، BQD [۱۹] و IBQD [۲۰] جستجو می‌کند. در واقع این روش، تمام حالات مختلف ترکیب این روش‌ها را بررسی می‌کند و تمام روش‌های ذکرشده، حالت‌های خاصی از MOQLS هستند. همچنین این روش، حالتی را تولید می‌کند که در هیچ یک از روش‌های ذکرشده قادر به تولید نیست. روش MOQLS برای سنتز منطقی ماتریس‌های یکانی عمومی، بهترین جواب‌ها در فضای جواب تولیدشده (نقاط بهینه پرتو) را ارائه کرده است. هر یک از این جواب‌ها می‌توانند در تکنولوژی‌های مختلف کوانتومی از اهمیت‌های مختلفی برخوردار باشند. برای مثال اگر در یک تکنولوژی، عمق از اهمیت بیشتری برخوردار باشد (مثلاً تکنولوژی تله‌یونی)، روش QSD به بهترین عمق کوانتومی می‌انجامد.

## مراجع

- [25] V. Kliuchnikov, D. Maslov, and M. Mosca, "Fast and efficient exact synthesis of single qubit unitaries generated by clifford and T gates," *Quantum Information and Computation*, vol. 13, no. 7-8, pp. 607-630, Jul. 2013.
- [26] C. Lin and A. Chakrabarti, "FTQLS: fault-tolerant quantum logic synthesis," *IEEE Trans. on VLSI Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 1350-1363, Jun. 2013.
- [27] B. Giles and P. Selinger, "Exact synthesis of multiqubit Clifford+T circuits," *Physical Review A*, vol. 87, no. 3, Article ID: 032332, Mar. 2013.
- [28] P. Niemann, R. Wille, and R. Drechsler, "Advanced exact synthesis of Clifford+T circuits," *Quantum Information Processing*, vol. 19, Article ID: 317, 23 pp., 27 Aug. 2020.
- [29] D. Ruffinelli and B. Barán, "Linear nearest neighbor optimization in quantum circuits: a multiobjective perspective," *Springer Science+Business Media, LLC*, pp. 1-26, Mar. 2017.
- [۳۰] ب. رستمیان ملکی و م. محمدی، "طراحی چندهدفه مدارهای کوانتومی با استفاده از برنامه‌نویسی ژنتیک،" مجموعه مقالات نوزدهمین کنفرانس ملی سالانه انجمن کامپیوتر ایران، دانشکده مهندسی کامپیوتر، صص. ۱۱۷۷-۱۱۸۲، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۵-۱۳ اسفند ۱۳۹۲.
- [31] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," *IEEE Trans. on CAD*, vol. 25, no. 6, pp. 1000-1010, Jun. 2006.
- [32] A. U. Khalid, *FPGA Emulation of Quantum Circuits*, MS Thesis: McGill University, Mar. 2005.
- [33] V. V. Shende, I. L. Markov, and S. S. Bullock, "Smaller two-qubit circuits for quantum communication and computation," in *Proc. Design Automation and Test in Europe Conf. and Exhibition*, pp. 980-985, Paris, France, 16-20 Feb. 2004.
- [34] D. Maslov, G. W. Dueck, D. M. Miller, and C. Negrevergne, "Quantum circuit simplification and level compaction," *IEEE Trans. on CAD*, vol. 27, no. 3, pp. 436-444, Mar. 2008.
- [35] T. H. Cormen, et al., *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Jun. 2009.
- آرزو رجایی** در سال ۱۳۸۶ مدرک کارشناسی مهندسی کامپیوتر گرایش نرم‌افزار خود را از دانشگاه فردوسی مشهد و در سال ۱۳۹۰ مدرک کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر گرایش نرم‌افزار را از دانشگاه شیخ بهایی اصفهان دریافت نمود. از سال ۱۳۹۱ الی ۱۳۹۶ نامبرده به عنوان مدرس حق التدریس در دانشگاه علمی و کاربردی بهزیستی مشهد به کار مشغول بوده و پس از آن به دوره دکترای مهندسی کامپیوتر گرایش نرم‌افزار در دانشگاه آزاد اسلامی مشهد وارد گردید و تاکنون در همان دانشگاه مشغول به تحصیل می‌باشد. مهندس رجایی از سال ۱۳۹۵ تاکنون به عنوان مدرس فرهنگی در هنرستان‌های دولتی مشهد مشغول به فعالیت می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه ایشان متنوع بوده و شامل موضوعاتی مانند ایده‌های نوین در محاسبات کوانتومی، طراحی وب و پایگاه داده‌ها می‌باشد.
- محبوبه هوشمند** کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را در رشته مهندسی کامپیوتر، گرایش نرم‌افزار به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۹ از دانشگاه فردوسی مشهد و دکترای خود را در رشته مهندسی کامپیوتر، گرایش معماری کامپیوتر از دانشگاه صنعتی امیرکبیر در سال ۱۳۹۳ دریافت کرده است. نامبرده از آخر تابستان ۱۳۹۵ تا آخر تابستان ۱۳۹۶ محقق پسا دکترا در زمینه رمزنگاری کوانتومی به طور مشترک در دانشگاه ملی سنجاپور و دانشگاه تکنولوژی و طراحی سنگاور بوده است. دکتر هوشمند در حال حاضر استادیار گروه مهندسی کامپیوتر دانشگاه آزاد اسلامی مشهد است. علایق پژوهشی ایشان شامل نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی، رمزنگاری، سیستم‌های چندعاملی و داده‌کاوی است.
- سیدعابد حسینی** دکترای خود را در رشته مهندسی برق گرایش کنترل از دانشگاه فردوسی مشهد در سال ۱۳۹۵ دریافت کرده است. دکتر حسینی در حال حاضر استادیار گروه مهندسی برق دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد است. علائق پژوهشی نامبرده در زمینه‌های کنترل سیستم‌های هوشمند، پردازش و تحلیل سیگنال‌های حیاتی، پردازش و تحلیل تصاویر پزشکی، الکتروفیزیولوژی و مدل‌سازی فعالیت‌های شناختی در انسان است. ایشان تاکنون بیش از ۸ جلد کتاب و فصل کتاب بین‌المللی ویراستاری و تدوین نموده، افزون بر ۸۰ مقاله علمی در مجلات معتبر و کنفرانس‌های ملی و بین‌المللی و ده‌ها گزارش فنی و طرح پژوهشی را به چاپ رسانیده است.
- [1] G. E. Moore, "Cramming more components onto integrated circuits," *Electronics*, vol. 38, no. 8, pp. 114-117, 19 Apr. 1965.
- [2] C. P. Williams, *Explorations in Quantum Computing*, Springer Verlag, Feb. 2011.
- [3] M. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, Jan 31, 2011.
- [4] M. Lukac, et al., "Evolutionary approach to quantum and reversible circuit synthesis," *Artificial Intelligence Review*, vol. 20, pp. 361-417, Jan. 2003.
- [5] R. P. Feynman, "Simulating physics with computers," *International J. of Theoretical Physics*, vol. 21, no. 6-7, pp. 467-488, Jun. 1982.
- [6] D. Deutsch, "Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer," in *Proc. of the Royal Society London A*, vol. 400, no. 1818, pp. 97-117, Jun. 1985.
- [7] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring," in *Proc. of the 35th Annual Symp. on Foundations of Computer Science*, pp. 124-134, Santa Fe, NM, USA, 20-22 Nov. 1994.
- [8] P. W. Shor, "Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer," *SIAM J. on Computing*, vol. 26, no. 5, pp. 1484-1509, Oct. 1997.
- [9] L. K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search," in *Proc. of the 28th Annual ACM Symp. on the Theory of Computing, STOC'96*, pp. 212-219, Philadelphia, PA, USA, 22-24 May 1996.
- [10] G. B. Charles and H. Bennett, "Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing," in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer System and Signal Processing*, pp. 175-179, Bangalore, India, 10-12 Dec. 1984.
- [11] C. H. Bennett, et al., "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels," *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 13, pp. 1895-1899, 29 Mar. 1993.
- [12] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, "Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states," *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 20, pp. 2881-2884, Nov. 1992.
- [13] A. Barenco, et al., "Elementary gates for quantum computation," *Physical Review A*, vol. 52, no. 5, pp. 3457-3467, Nov. 1995.
- [14] G. Cybenko, "Reducing quantum computations to elementary unitary operations," *Computing in Science and Engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 27-32, Mar./Apr. 2001.
- [15] V. V. Shende, I. L. Markov, and S. S. Bullock, "Minimal universal two-qubit quantum circuits," *Physical Review A*, vol. 69, pp. 062321-062329, Jun. 2004.
- [16] M. Mottonen, J. J. Vartiainen, V. Bergholm, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits for general multiqubit gates," *Physical Review Letters*, vol. 93, Article ID: 130502, Sept. 2004.
- [17] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Mottonen, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled one-qubit gates," *Physical Review A*, vol. 71, no. 5, pp. 23-30, May 2005.
- [18] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," *IEEE Trans. on CAD*, vol. 25, no. 6, pp. 1000-1010, Jun. 2006.
- [19] M. Saeedi, M. Arabzadeh, M. Saheb Zamani, and M. Sedighi, "Block-based quantum-logic synthesis," *Quantum Information and Computation J.*, vol. 11, no. 3, pp. 262-277, Mar. 2011.
- [۲۰] ک. مرجوعی، م. هوشمند، م. صاحب‌الزمانی و م. صدیقی، "سنتز منطقی مدارهای کوانتومی با استفاده از روش مبتنی بر بلوک بهبودیافته،" نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران، ب- مهندسی کامپیوتر، سال ۱۴، شماره ۳، صص. ۲۳۹-۲۴۸، پاییز ۱۳۹۵.
- [21] M. Steane, "Error correcting codes in quantum theory," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, no. 5, pp. 793-797, Jul. 1996.
- [22] D. Bacon, "Operator quantum error-correcting subsystems for self-correcting quantum memories," *Phys. Rev. A*, vol. 73, no. 1, pp. 01234001-0124013, Jan. 2006.
- [23] D. Forney, M. Grassl, and S. Guha, "Convolutional and tail-biting quantum error-correcting codes," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 53, no. 3, pp. 865-880, Mar. 2007.
- [24] M. Houshmand, S. Hosseini-Khayat, and M. M. Wilde, "Minimalmemory, non-catastrophic, polynomial-depth quantum convolutional encoders," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 59, no. 2, pp. 1198-1210, Feb. 2013.