یک الگوریتم جدید مبتنی بر آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته برای یادگیری پارامتری شبکه بیزی

محمدرضا ملاخلیلی میبدی و محمدرضا میبدی

چکیده: در این مقاله یک آتاماتای توزیع‌شده جدید به نام آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته برای یادگیری توزیع توأم مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی معرفی خواهد شد. این شبکه از آتاماتاها در محیط‌هایی که پاسخ محیط به مجموعه‌ای از اقدامات انجام‌شده توسط آتاماتا، مستقل از یکدیگر نبوده و نوعی وابستگی شرطی میان این پاسخ‌ها حاکم باشد، کاربرد دارد. نشان داده شده که این آتاماتای جدید قادر است تخمینی از توزیع شرطی اقدام‌ها را فرا بگیرد. در ادامه چارچوبی مبتنی بر آتاماتای یادگیر توزیع‌شده جدید پیشنهادی، برای حل مسأله یادگیری برخط پارامترهای یک شبکه بیزی ارائه شده است. این چارچوب با داده‌ها و شواهد جدید منطبق شده و عملیات به روز رسانی پارامترها را انجام می‌دهد. با بررسی‌های ریاضی و آزمایش‌های عملی روی شبکه‌های نمونه، نشان داده‌ایم که این مدل جدید قادر است با تخمینی با دقت برابر با EM، یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی را انجام دهد. علاوه بر ویژگی افتراقی‌بودن و یادگیری برخط، این ساختار جدید با شرایطی که داده‌ها ناکامل باشند نیز سازگار است و به دلیل استفاده از روابط یادگیری خطی و مبتنی بر آتاماتای یادگیر، سربار محاسباتی کمی نیز دارد.

***کلید واژه:* آتاماتای یادگیر، شبکه بیزی، یادگیری پارامتری.**

۱- مقدمه

مسأله یادگیری شبکه بیزی از روی داده‌ها، یکی از مسایل مورد توجه در حوزه‌های مرتبط با شبکه‌های بیزی می‌باشد که توجه زیادی را به خود معطوف کرده است. ساخت شبکه‌های بیزی بزرگ مرتبط با یک زمینه خاص به شکل دستی توسط یک متخصص در زمینه مورد نظر، فرایندی زمان‌بر و پیچیده است. علاوه بر این، مدل ساخته شده توسط یک متخصص الزاماً مناسب‌ترین مدل برای آن حوزه مشخص نبوده و استفاده از مدل‌های ایستا نیز به دلیل تضاد با پویایی جهان واقعی چندان موردپسند نیست. مدل‌هایی که به صورت پویا با شرایط متغیر موجود خود را تطبیق دهند در کانون توجه است [۱]. بیشتر کارهایی که در زمینه یادگیری شبکه بیزی صورت گرفته، به بررسی یادگیری دسته‌ای پرداخته‌اند. در این نوع یادگیری، تعدادی نمونه وجود دارد و هدف، ساخت یک شبکه بیزی است که به بهترین نحو داده‌ها را مدل کند اما در سمت دیگر، یادگیری برخط قرار دارد. در این نوع یادگیری، هدف تطبیق‌دادن مدل فعلی (و احتمالاً ناقص) موجود با مجموعه‌ای از داده‌های نمونه است. این نوع یادگیری برای مواردی که به دلیل دقت پایین مدل اولیه و یا بروز تغییرات در محیط و پیدایش شواهد و نمونه‌های جدید، بهبودبخشیدن به مدل فعلی مورد نیاز است، کاربرد دارد.

در ساخت شبکه‌های بیزی با دو مسأله روبه‌رو هستیم: یادگیری ساختار شبکه بیزی (ساخت گراف) و یادگیری پارامترهای (جداول احتمال شرطی) متناظر با گره‌های گراف. یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی به دلیل سختی انتصاب مقادیر عددی تخمینی مناسب به پارامترها، با توسل به مفهوم بیزی احتمال، کاری پیچیده است؛ علاوه بر این که یادگیری پارامتری، بخشی از الگوریتم‌هایی را تشکیل می‌دهد که به مسأله یادگیری ساختاری شبکه بیزی می‌پردازند [۲]. در این مقاله، مسأله یادگیری ساختاری مورد بررسی نیست. به بیان دیگر فرض می‌کنیم یک شبکه بیزی با ساختار معین S که مقادیر پارامترهای آن توسط بردار θ به شکل عددی داده شده، موجود است. هدف استفاده از مجموعه داده D برای ساخت یک شبکه بیزی با همان ساختار S و بردار پارامترهای θ^{new} است.

در بخش دوم ضمن بررسی مختصر شبکه‌های بیزی، برخی از مبانی ریاضی مورد استفاده در سایر بخش‌های مقاله را بررسی خواهیم کرد، ضمن این که برخی از کارهای مشابهی که در این زمینه صورت گرفته را بررسی کرده و وجوه تمایز روش پیشنهادی با آنها را روشن خواهیم کرد. در بخش سوم، چارچوب جدید پیشنهادی را معرفی کرده و به بررسی تئوریک آن خواهیم پرداخت و بخش چهارم به بررسی عملی چارچوب پیشنهادی اختصاص یافته است.

۲- مبانی ریاضی

۲-۱ شبکه بیزی

شبکه‌های بیزی ابزاری کارامد برای نمایش و استدلال تحت شرایط عدم قطعیت هستند. یک شبکه بیزی، نمایش فشرده‌ای از توزیع احتمال توأم بر روی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است. این مدل شامل یک گراف است که به صورت کیفی، روابط استقلال میان متغیرها را در خود ذخیره می‌کند و علاوه بر این شامل پارامترهایی است که به صورت کمی، به همراه ساختار ارائه‌شده توسط گراف مزبور، یک توزیع منحصر به فرد ایجاد می‌نمایند [۲].

تعریف ۱: یک شبکه بیزی $B=(G,\Theta)$ نمایانگر یک توزیع احتمال توأم بر روی مجموعه متغیرهای تصادفی $X=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ است که متشکل از دو بخش می‌باشد. بخش اول گراف جهت‌دار بدون دور G است که گره‌های آن، متناظر با متغیرهای تصادفی بوده و ساختار آن روابط استقلال مارکوف را در خود ذخیره می‌کند و بخش دوم آن مجموعه‌ای از پارامترهای Θ است که توزیع احتمال متغیر تصادفی X_i به شرط معلوم‌بودن مقادیر والدهای آن، $p(x_i|pa(x_i))$ ، را تعیین می‌نماید.

یادگیری پارامترها با داده‌های کامل: یک مدل مولد، مانند شبکه‌های بیزی، مدلی است که به کمک ساختارها و پارامترهای درونی خود بتواند

این مقاله در تاریخ ۲۵ فروردین ماه ۱۳۹۲ دریافت و در تاریخ ۱۶ آذر ماه ۱۳۹۲ بازنگری شد.

محمدرضا ملاخلیلی میبدی، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد میبد، میبد، (email: mollakhalili@maybodiau.ac.ir).

محمدرضا میبدی، آزمایشگاه محاسبات نرم، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: mmeybodi@aut.ac.ir).

نحوه تولید داده‌های مشاهده‌شده را مشخص کند. در یادگیری پارامتری یک شبکه بیزی از روی داده‌ها، به دنبال این هستیم که شبکه بیزی حاصل بتواند توزیع احتمال واقعی P^* را که داده‌ها به وسیله آن تولید شده‌اند، فرا بگیرد.

در عمل ما با یک مشکل اساسی‌تر نیز مواجه می‌شویم. به جای در اختیار داشتن P^* و یا تعداد نامحدودی نمونه تولیدشده توسط P^*، تعداد محدودی از داده‌های آموزشی $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_m\}$ را که به صورت مستقل از هم از توزیع P^* تولید شده‌اند، در اختیار داریم. حال با در اختیار داشتن اطلاعات محدودی که از طریق D به دست آمده می‌خواهیم به گونه‌ای مدل $B=(G,\Theta)$ را بیاموزیم که این مدل بهترین تقریب برای P^* باشد. یک راهکار متداول استفاده از روش تخمین درست‌نمایی بیشینه است.

۲-۱-۱ روش تخمین درست‌نمایی بیشینه

روش تخمین درست‌نمایی بیشینه در بسیاری از زمینه‌های یادگیری استفاده می‌شود. در بطن آن ایده ساده‌ای وجود دارد که بر اساس آن مدل مناسب، مدلی است که برازنده مناسبی برای داده‌های D باشد. بنابراین لازم است احتمال این که یک مدل، مولد داده‌های مشاهده‌شده باشد را محاسبه کرد.

تعریف ۲: برای هر نمونه $d\in D$، احتمال $p(d|M)$ درست‌نمایی M با فرض d نامیده می‌شود. با فرض این که نمونه‌های موجود در D مستقل هستند، درست‌نمایی M با فرض D برابر است با

$$L(M|D)=\prod_{d\in D}P(d|M) \qquad (۱)$$

برای سهولت در محاسبات، از طرفین (۱) لگاریتم می‌گیرند. لگاریتم $L(M|D)$ را log - likelihood می‌نامند که محاسبه آن در (۲) نشان داده شده است

$$LL(M|D)=\prod_{d\in D}\log_2 P(d|M) \qquad (۲)$$

اگر قادر به انتخاب چندین مدل مختلف برای توصیف داده‌ها باشیم، در این صورت قانون درست‌نمایی بیشینه توصیه می‌کند مدلی انتخاب شود که $LL(M|D)$ را روی مجموعه داده‌های D بیشینه کند. به عبارت دیگر اگر قصد تخمین توزیع‌های شرطی را داریم در این صورت مدل‌های ممکن M_θ روی ساختار اتفاق نظر دارند، اما روی پارامترها متفاوت هستند. در این صورت بایستی یک تخمین‌گر پارامتر θ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که درست‌نمایی را بیشینه کند، یعنی

$$\hat{\theta}=\arg^{\max}_{\theta} L(M_\theta|D)=\arg^{\max}_{\theta} LL(M_\theta|D) \qquad (۳)$$

در ادامه از نماد $\hat{\theta}$ به منظور نمایش تخمین بیشینه درست‌نمایی برای پارامتر θ استفاده می‌کنیم.

اگر فرض کنیم D شامل n نمونه و هر نمونه $d_i\in D$ یک نمونه کامل و برابر با $(x_{i,1},\ldots,x_{i,u})$ باشد، در این صورت

$$LL(M|D)=\sum_{i=1}^{n}P(d_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{u}P(x_{i,j}|pa(x_{i,j})) \qquad (۴)$$

با توجه به معین‌بودن ساختار، مسأله بالا به تخمین تعدادی p_{ijk} کاهش می‌یابد؛ احتمال مربوط به متغیر i در kامین حالتش به شرط داشتن والد j. در این صورت تخمین مربوط به p_{ijk} برابر است با

$$\hat{p}_{ijk}=\frac{n_{ijk}}{n_{ij}} \qquad (۵)$$

در (۵) n_{ijk} عبارت است از تعداد نمونه‌های آموزشی که در آن kامین حالت x_i با jامین حالت والدهایش رخ می‌دهد و n_{ij} مجموع n_{ijk}ها به ازای تمام مقادیر k است. به این ترتیب در شبکه‌های بیزی برای بیشینه تخمین درست‌نمایی کافی است مقادیر را از طریق شمارش محاسبه کنیم [۱] و [۲].

۲-۱-۲ روش تخمین بیزین

در این روش از یک توزیع پیشین استفاده شده و با استفاده از نمونه‌ها و تجربیات مکرر، توزیع احتمال به روز رسانی می‌شود. مطابق با روش بیزی، اگر H یک فرضیه باشد و E گزاره‌ای که نشان‌گر یک نمونه است، رابطه بیز به صورت (۶) خواهد بود

$$P(H|E)=P(H)\times\frac{P(E|H)}{P(E)} \qquad (۶)$$

در (۶)، $P(H|E)$ درجه باور پسین یا درجه باور به H پس از مشاهده E است و $P(E|H)/P(E)$ را درست‌نمایی می‌نامند که اثر E در میزان باور به H را نمایش می‌دهد. $P(H)$ درجه باور به H قبل از مشاهده E است و استفاده مکرر از (۶) با استفاده از شواهد E باعث به روز شدن $P(H)$ می‌گردد.

حال فرض کنید θ مجموعه‌ای از پارامترها است که بایستی مورد استنتاج قرار گیرند و $E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ یک مجموعه مستقل از مشاهدات باشد. فرض می‌کنیم توزیع e_i به صورت $P(e|\theta)$ و توزیع اولیه θ مقدار $P(\theta|\alpha)$ باشد که α برداری از اَبَرپارامترها است

$$P(\theta|E,\alpha)=\frac{P(E|\theta,\alpha)}{P(E|\alpha)}P(\theta|\alpha)=\frac{P(E|\theta,\alpha)P(\theta|\alpha)}{\int_\theta P(E|\theta,\alpha)P(\theta|\alpha)\mathrm{d}\theta} \qquad (۷)$$

که در (۷)، $P(E|\theta,\alpha)=\prod_k P(e_k|\theta)$ است.

۲-۱-۳ یادگیری پارامتری شبکه بیزی به کمک داده‌های ناقص

تخیمن پارامترهای یک شبکه بیزی برای داده‌های ناقص، پیچیده‌تر است. الگوریتمی که غالباً برای این حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد، الگوریتم EM یا نسخه‌هایی بهبودیافته از آن است (شکل ۱) [۲].

فرض کنید ساختار B روی مجموعه متغیرهای $U=\{X_1,\ldots,X_n\}$ مفروض بوده و θ_{ijk} نشان‌دهنده پارامترهای متناظر با احتمال شرطی $P\{X_i=k|Pa(X_i)=j\}$ باشد (احتمال متغیر X_i که در kامین حالت خود قرار دارد با شرط مفروض‌بودن jامین پیکربندی برای گره‌های والد آن). با استفاده از این نمادگذاری تخمین $\hat{\theta}_{ijk}$ مبتنی بر درست‌نمایی بیشینه را می‌توانیم برای پارامتر θ_{ijk} بر اساس داده $D=\{d_1,\ldots,d_m\}$ متشکل از m نمونه و با استفاده از الگوریتم EM محاسبه کنیم [۱].

ایده کلی این الگوریتم، مقداردهی اولیه به مقادیر نامعلوم (با مقادیر احتمالی یکسان) و به روز رسانی جدول احتمالات شرطی تا رسیدن به یک شرط خاص است.

۲-۲ آتاماتای یادگیر و آتاماتای یادگیر توزیع‌شده

آتاماتای یادگیر یک مدل انتزاعی است که به طور تصادفی یک عمل از مجموعه متناهی اعمال خود را انتخاب کرده و بر محیط اعمال می‌کند. محیط عمل انتخاب‌شده توسط آتاماتای یادگیر را ارزیابی کرده و نتیجه آن را توسط یک سیگنال تقویتی به آتاماتای یادگیر اطلاع می‌دهد. سپس

Algorithm EM

- Choose an $\varepsilon > 0$ (stopping criterion)
- Let

$$\theta^0 = \{\theta_{ijk}\}$$

$$1 \le i \le n \ , \ 1 \le k \le \left|sp(xi)\right| - 1$$

$$1 \le j \le \left|sp(pa(xi))\right|$$

- Set $t = 0$
- **Repeat**
  - **E-Step:** for each $1 \le i \le n$ calculate the table of expected counts

$$E_{\theta^t}[N(X_1, Pa(X_i))\big|D] = \sum_{d \in D} P(X_i, Pa(X_i))\big|d, \theta^t)$$

  - **M-Step:** use the expected counts as if they were actual counts to calculate a new maximum likelihood estimator for all θ_{ijk}

$$\hat{\theta}_{ijk} = \frac{E_{\theta^t}[N(X_i, Pa(X_i) = j)\big|D]}{\sum_{h=1}^{|sp(X_i)|} E_{\theta^t}[N(X_i = h, Pa(X_i) = j)\big|D]}$$

  - Set $\theta^{t+1} = \hat{\theta}$
- Until $\left|\log_2 P(D\big|\theta^{t+1}) - \log_2 P(D\big|\theta^t)\right| \le \varepsilon$

شکل ۱: الگوریتم EM.

داخلی خود را به روز کرده و عمل بعدی خود را انتخاب می‌کند. آتاماتای یادگیر به دو دسته آتاماتای یادگیر با ساختار ثابت و آتاماتای یادگیر با ساختار متغیر تقسیم می‌گردد [۳] تا [۵].

آتاماتای یادگیر با ساختار متغیر توسط چهارتایی $\{\alpha, \beta, p, T\}$ نشان داده می‌شود که در آن $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ مجموعه اعمال آتاماتای یادگیر، $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$ مجموعه ورودی‌های آتاماتای یادگیر، $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ بردار احتمال انتخاب هر یک از عمل‌ها و T، $p(n+1) = T[\alpha(n), \beta(n), p(n)]$ الگوریتم یادگیری آتاماتای یادگیر می‌باشد. الگوریتم‌های یادگیری متنوعی برای آتاماتای یادگیر ارائه‌شده است [۶] که در ادامه یک الگوریتم یادگیری خطی برای آتاماتای یادگیر ارائه می‌گردد. فرض کنید آتاماتای یادگیر در مرحله nام اقدام α_i خود را انتخاب نموده و محیط ارزیابی خود را توسط سیگنال تقویتی $\beta(n)$ به آتاماتای یادگیر اعلام کند. با استفاده از الگوریتم یادگیری خطی، آتاماتای یادگیر بردار احتمال انتخاب اقدام‌های خود را مطابق (۸) تنظیم می‌کند

$$\begin{aligned} p_i(n+1) &= p_i(n) + a(1-\beta(n))(1-p_i(n)) - b\beta(n)p_i(n) \\ p_j(n+1) &= p_j(n) + a(1-\beta(n))p_j(n) + \frac{b\beta(n)}{r-1} - \\ & \quad b\beta(n)p_j(n) \quad \text{if} \quad j \ne i \end{aligned} \qquad (8)$$

که a پارامتر پاداش و b پارامتر جریمه است. اگر a و b با هم برابر باشند، الگوریتم L_{R-P}، اگر b از a خیلی کوچک‌تر باشد، الگوریتم $L_{R\varepsilon P}$ و اگر b صفر باشد، الگوریتم L_{R-I} نام دارد [۳].

آتاماتای یادگیر توزیع‌شده شبکه‌ای از چند آتاماتای یادگیر است که برای حل یک مسأله مشخص با یکدیگر همکاری می‌کنند [۷]. یک آتاماتای یادگیر توزیع‌شده را می‌توان با یک گراف جهت‌دار مدل کرد به صورتی که مجموعه گره‌های آن را مجموعه‌ای از آتاماتاهای یادگیر و یال‌های خروجی هر گره مجموعه اعمال متناظر با آتاماتای یادگیر متناظر با آن گره است. هنگامی که آتاماتا یکی از اعمال خود را انتخاب می‌کند، آتاماتایی که در انتهای دیگر یال متناظر با آن عمل قرار دارد، فعال می‌شود [۵]. آتاماتای یادگیر توزیع‌شده علی‌رغم پاره‌ای محدودیت‌های ناشی از نحوه فعال‌شدن آتاماتاها، بارها برای حل رده وسیع و متنوعی از

Algorithm L_{R-I}-Based Update Bayesian Parameters

```
1: Parameters Real α ∈ (0,1), G = (V, E), S
2: for i ← 1 to |V| do
3:   for j ← 1 to g(i) do
4:     p_{i,j} ← 1 / S_i
5:   end for
6: end for
7: loop
8:   for i ← 1 to |V| do
9:     compute g according to parents (i) actions
10:    Draw randomly an action i in group g according to
       probabilities p_{1,g}, ..., p_{K,g}
11:    Receive either reward or penalty
12:    if reward then
13:      for j ← 1 to K do
14:        if j ≠ i then
15:          p_{j,g} ← (1 − α) p_{j,g}
16:        else
17:          p_{i,g} ← p_{i,g} + α(1 − p_{i,g})
18:        end if
19:      end for
20:      α = update(α)
21:    else
22:      Donothing
23:    end if
24:  end for
25: end loop
```

شکل ۲: الگوریتم پیشنهادی مبتنی بر آتاماتا برای یادگیری پارامتری شبکه بیزی.

مسایل مورد استفاده قرار گرفته که این مسایل غالباً در یکی از دو گروه مسایل مرتبط با نمونه‌گیری در شبکه‌های تصادفی [۸] تا [۱۱] یا تخمین مقادیر احتمالی [۱۲] تا [۱۵] قابل رده‌بندی هستند.

۲-۳ مروری بر برخی کارهای انجام‌شده

بحث یادگیری پارامترهای شبکه بیزی و الگوریتم‌های ارائه‌شده برای آن از تنوع بالایی برخوردار است. در میان کارهایی که در این خصوص صورت گرفته، [۱۶] و [۱۷] مشابهت بیشتری با مجموعه کار انجام‌شده در این مقاله دارد.

در [۱۶] مسأله یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی با بروز شواهد جدید بررسی شده است. به بیان فرمال، فرضاً Z_i گرهی در یک شبکه بیزی باشد که مجموعه مقادیر $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^{r_i}\}$ را اختیار می‌کند و Pa_i مجموعه والدین گره Z_i است که مقادیر $\{Pa_i^1, Pa_i^2, \ldots, Pa_i^{q_i}\}$ را اتخاذ می‌کند. در این صورت یک مدخل در جدول احتمالات شرطی یا CPT مربوط به Z_i با $\theta_{ijk} = P(Z_i = Z_i^K \big| Pa_i = Pa_i^j)$ نشان داده می‌شود. علاوه بر این فرض شده یک شبکه با مجموعه پارامترهای فعلی $\bar{\theta}$ موجود بوده و یک مجموعه از داده‌های جدید (یا استفاده‌شده قبلی) $D = \{y_1, \ldots, y_N\}$ داده شده باشد. نویسنده مقدار جدید پارامتر θ را در طی فرایند به روز رسانی بر اساس داده‌های موجود، تابعی از مقدار درست‌نمایی داده‌ها بر اساس پارامتر جدید و فاصله میان دو مدل فرض کرده و رابطه کلی زیر را استخراج کرده است

$$\hat{\theta} = \arg\max_\theta [F(\theta)] = \arg\max_\theta [\varphi L_D(\theta) - d(\theta, \bar{\theta})]$$

نویسنده در ادامه، معیارهایی برای فاصله بین دو مدل معرفی کرده و این روش را که $\mathrm{EM}(\varphi)$ نامیده است با روش EM معمول مقایسه نموده و نشان داده که این روش توسعه‌ای بر روش EM است. در [۱۶] نشان داده

شده که مقادیر مختلف φ منجر به سرعت‌های مختلف همگرایی می‌شود. پارامتر φ کنترل‌کننده میزان اتکا به گذشته است و هرچه مقدار آن به ۱ نزدیک‌تر باشد، اثرپذیری مدل از داده‌های ورودی جدید بیشتر خواهد شد. در عوض هر قدر این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد، پارامترها آهسته‌تر از پارامترهای قبلی فاصله می‌گیرند.

در [۱۷] نویسنده آنالیز ارائه‌شده در [۱۶] را ساده‌تر کرده و با فرض این که داده ناموجود نداشته باشیم، به روابط ساده‌تری برای به روز رسانی پارامترها بر اساس داده ورودی و مقادیر قبلی پارامترها رسیده است. این قانون به شیوه افزایش یا کاهش مقادیر پارامترها عمل می‌کند. روابطی که به دست آمده‌اند به صورت زیر است

$$\theta_{ijk}^{T} = \begin{cases} \varphi + (1-\varphi)\theta_{ijk}^{T-1} & , P(Pa_i^j \mid y_T) = 1 \ , \ P(Z_i^K \mid y_T) = 1 \\ (1-\varphi)\theta_{ijk}^{T-1} & , P(Pa_i^j \mid y_T) = 1 \ , \ P(Z_i^K \mid y_T) = 0 \\ \theta_{ijk}^{T-1} & , \text{otherwise} \end{cases}$$

برای تعیین میزان افزایش یا کاهش یا همان φ، از برخی خواص توزیع مقادیر پارامتر θ استفاده و همگرایی الگوریتم تسریع شده است.

ایده استفاده از یک آتاماتای یادگیر برای یادگیری پارامتری یک شبکه بیزی نخستین بار در [۱۸] و برای یادگیری پارامترهای یک شبکه دسته‌بندی کننده ساده مورد استفاده قرار گرفته است. در الگوریتم ارائه‌شده، یک آتاماتای یادگیر در هر گره متناظر با کلاس طبقه‌بندی کننده، فرایند به روز رسانی پارامترها را بر اساس داده‌های ورودی انجام می‌دهد.

۳- الگوریتم پیشنهادی

همان گونه که توضیح داده شد، در یک شبکه بیزی، هر گره، یک توزیع شرطی را مدل می‌کند و به این ترتیب به منظور استفاده از آتاماتای یادگیر و آتاماتای یادگیر توزیع‌شده برای یادگیری توزیع CPD متناظر با هر گره، بایستی یادگیری را به گونه‌ای ترتیب داد که در نهایت به توزیع مد نظر منجر شود. برای بررسی نحوه انجام کار، گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

تعریف ۳: توزیع برنولی با پارامتر θ یک توزیع احتمالی گسسته است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$P(y|\theta) = \theta^{y}(1-\theta)^{1-y} \quad , \quad y = \{0,1\} \text{ and } \theta \in [0,1]$$

مطابق با این تعریف y دارای مقدار ۱ با احتمال θ و مقدار ۰ با احتمال $1-\theta$ است.

گزاره ۱: فرض کنید یک آتاماتای یادگیر تصادفی با دو اقدام a_1 و a_2 در یک محیط تصادفی قرار دارد. بازخورد محیط تصادفی به اقدام‌های این آتاماتا از یک توزیع برنولی با پارامتر θ تبعیت می‌کند (اگر اقدام a_1 انتخاب شده باشد با احتمال θ پاداش می‌گیرد). الگوریتم مورد استفاده توسط آتاماتای یادگیر الگوریتم L_{R-P} است و در آن $\alpha = \beta$ می‌باشد. در صورتی که آزمایش به تعداد کافی انجام شود، $E[p_1] = p(a_1) = \theta$ و $E[p_2] = p(a_2) = 1-\theta$.

اثبات: برای اقدام a_1 اثبات می‌کنیم. برای دومی مشابه همین است. ضمناً فرض می‌کنیم پارامتر یادگیری مقدار ثابت a باشد (و مانند آنچه که در الگوریتم ارائه شده است در طول زمان تغییر نمی‌کند).

الگوریتم مورد استفاده توسط آتاماتای یادگیر الگوریتم L_{R-P} است و بنابراین

$$p_1^{t+1} = (1-a)p_1^t + aI^{t+1} \qquad (۹)$$

در (۹)

$$I^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \theta \\ 0 & \text{with probability } (1-\theta) \end{cases} \qquad (۱۰)$$

I^{t+1} یک فرایند تصادفی برنولی با پارامتر θ است و علاوه بر این داریم

$$E[p_1^{t+1}] = (1-a)E[p_1^t] + aE[I^{t+1}] = (1-a)E[p_1^t] + a\theta \qquad (۱۱)$$

از رابطه بازگشتی (۱۱) داریم

$$E[p_1^{t+1}] = (1-a)^t E[p_1^0] + (1-(1-a)^t)\theta$$

با توجه به این که $0 < a < 1$ رابطه بالا نشان می‌دهد $\lim_{t\to\infty} E[p_1^t] = \theta$.

نکته: اگر مقدار پارامتر یادگیری را همانند آنچه که در الگوریتم مد نظر است مقداری پویا در نظر بگیریم نیز تغییری در این روابط حاصل نمی‌شود و داریم

$$E[p_1^{t+1}] = \prod_{k=1}^{t}(1-a^k)E[p_1^0] + (1-\prod_{k=1}^{t}(1-a^k))\theta$$

و مجدداً همین نتیجه قابل حصول است.

۳-۱ آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته

در بخش قبل آتاماتای یادگیر توزیع‌شده را معرفی کردیم، شبکه‌ای از آتاماتاها که با همکاری یکدیگر برای حل یک مسأله به کار می‌روند. در این بخش، نسخه‌ای توسعه‌یافته از آتاماتای یادگیر توزیع‌شده را معرفی می‌کنیم که قادر به استخراج جداول احتمال شرطی متناظر با یک شبکه بیزی است. توسعه آتاماتای یادگیر توزیع‌شده در [۱۹] ارائه شده است.

تعریف ۴: یک آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته DLA با سه‌تایی $DLA = (V, E, S)$ تعریف می‌شود که در آن:

الف) $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار فاقد دور (dag) است و در آن $V = \{LA_i \mid i = 1, 2, \ldots, |V|\}$ مجموعه‌ای از آتاماتاهای یادگیر است. اندیس آتاماتاها بر اساس ترتیب توپولوژیکی گره‌های گراف G مرتب شده و E مجموعه یال‌های جهت‌دار است.

ب) $S = \{S_i \mid i = 1, 2, \ldots, |V|\}$ و S_i تعداد اقدام‌های قابل انجام توسط آتاماتای LA_i است که این مقدار را به صورت $S(LA_i) = S_i$ نیز نشان می‌دهیم. شبه کد الگوریتم پیشنهادی در شکل ۲ ارایه شده است. ضمناً هر آتاماتای LA_i به تعداد g، گروه اقدام دارد که g برابر با حاصل‌ضرب تعداد اقدام‌های آتاماتاهای متناظر با گره‌های والد V_i در گراف G است. در حقیقت

$$g = g(i) = \prod_j S_j \quad \forall j \text{ which } V_j \in Parent(V_i)$$

۳-۲ الگوریتم جدید پیشنهادی برای یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی در حالت داده‌های کامل

با توجه به مفهومی که از آتاماتای یادگیر توزیع‌شده ارائه گردید و با توجه به گزاره ۱، می‌توان یک ساختار شبکه‌ای از آتاماتاهای یادگیر در قالب یک آتاماتای یادگیر توزیع‌شده ارائه داد که قادر به تخمین توزیع توأم متغیرهای تصادفی برای استفاده در یادگیری پارامتری شبکه‌های بیزی باشد. هر آتاماتای یادگیر در این سیستم به شکل زیر عمل می‌کند:

۱) یک آتاماتا تا زمانی که کلیه والدهای آن فعال نباشند فعال نخواهد بود. زمانی که یک آتاماتا فعال باشد قادر است اقدامی را انجام دهد و آن را به محیط اعمال کند.

۲) اگر در یک زمان چندین آتاماتا فعال باشند، ترتیب اقدام توسط آنها به ترتیب توپولوژیکی گره‌های متناظر آنها در گراف G است.

جدول ۱: خلاصه احتمالات جریمه یا پاداش اقدام‌های آتاماتای LA_2 در گزاره ۲.

اقدام	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$
$P(r)$	$\theta_2\theta_1$	$\theta_2(1-\theta_1)$	$(1-\theta_2)\theta_1$	$(1-\theta_2)\times(1-\theta_1)$
$P(p)$	$(1-\theta_2)\theta_1$	$(1-\theta_2)\times(1-\theta_1)$	$\theta_2\theta_1$	$\theta_2(1-\theta_1)$

۳) یک آتاماتا بر اساس نوع اقدام انجام‌شده توسط آتاماتاهای والدش یکی از گروه‌های اقدام را فعال می‌کند. سپس در آن گروه اقدامی را به تصادف انتخاب کرده و آن را به محیط اعمال می‌کند. محیط بر اساس نوع اقدام انجام‌شده یک سیگنال تقویتی بازخوردی تولید می‌کند و آتاماتا بر اساس این سیگنال، بردار احتمال انتخاب اقدام‌های خود در آن گروه را به روز رسانی می‌کند.

۴) یک اجرا یا Run برای آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته عبارت است از یک مجموعه مرتب A از اقدام‌های تمامی آتاماتاها؛ $A=(a_1,a_2,\ldots,a_V)$. به عبارتی، یک اجرا برابر است با فعال‌شدن کلیه آتاماتاها به ترتیب توپولوژیکی و اعمال اقدام انجام‌شده به محیط و دریافت سیگنال تقویتی از محیط.

گزاره ۲: یک آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته با دو آتاماتای LA_1 و LA_2 مفروض است که در آن $paerents(LA_2)=LA_1$ و $paerents(LA_1)=\phi$. محیط تصادفی به اقدام آتاماتای ۱ بر اساس توزیع دودویی برنولی با پارامتر θ_1 و به اقدام آتاماتای ۲ بر اساس توزیع دودویی برنولی با پارامتر θ_2 پاداش می‌دهد. در این صورت $E[p_1]=p(a_1)=\theta_1$ و $E[p_{1,1}]=p(a_{1,1})=\theta_1\theta_2$.

اثبات: در مورد این که $p(a_1)=\theta_1$ با توجه به این که انتخاب اقدام توسط LA_1 مستقل از اقدام سایر آتاماتاها است، مشابه با گزاره ۱ قابل بررسی است. اما در مورد LA_2 چون انتخاب گروه اقدام توسط آتاماتا به اقدام LA_1 بستگی دارد، محاسبه را مجدداً انجام می‌دهیم.

برای سادگی محاسبات جدول احتمالات ۱ که وضعیت هر اقدام آتاماتای LA_2 و احتمال پاداش یا جریمه‌شدن آن را نشان می‌دهد در نظر بگیرید. اگر $\Delta^t_{1,1}$ میزان افزایش احتمال اقدام $p(a_{1,1})$ را در اجرای tام نشان دهد، $\Delta^t_{1,1}$ تابعی از اقدام‌های آتاماتاها و بازخوردی است که از محیط دریافت می‌کند و امید ریاضی مقدار آن برابر است با

$$E[\Delta^t_{1,1}]=\theta_2\theta_1(a^t-a^tE[p^t_{1,1}])+(1-\theta_2)\theta_1(-a^tE[p^t_{1,1}])+$$
$$(1-\theta_2)\times\theta_1\times(-a^tE[p^t_{1,1}])+\theta_2\theta_1(a^t-a^tE[p^t_{1,1}])=$$
$$2a^t\theta_2\theta_1-2a^t\theta_1E[p^t_{1,1}]$$

پس رابطه بازگشتی زیر برای دنباله مقادیر $E[p^t_{1,1}]$ به دست می‌آید

$$E[p^{t+1}_{1,1}]=2a^t\theta_2\theta_1+(1-2a^t\theta_1)E[p^t_{1,1}] \qquad (12)$$

که (۱۲) نشان می‌دهد $E[p^{t+1}_{1,1}]-\theta_2\theta_1=(1-2a^t\theta_1)(E[p^t_{1,1}]-\theta_2\theta_1)$، لذا $\lim_{t\to\infty}E[p^t_{1,1}]=\theta_2\theta_1$.

از آنجا که $\theta_1=P(LA_1=1)$ و $\theta_2=P(LA_2=1|LA_1=1)$، در این صورت $\theta_2\theta_1=P(LA_2=1,LA_1=1)$. به این ترتیب اگر محیط به صورت شرطی به اقدام‌های آتاماتای توزیع‌شده توسعه‌یافته پاسخ دهد، الگوریتم و ساختار ارائه‌شده قادر به یادگیری توزیع احتمال توأم مورد نیاز برای ساخت شبکه بیزی خواهد بود. به همین روش می‌توان نشان داد که

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}E[p^t_{11}] & E[p^t_{12}]\\ E[p^t_{21}] & E[p^t_{22}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_2\theta_1 & \theta_2\times(1-\theta_1)\\ (1-\theta_2)\times\theta_1 & (1-\theta_2)\times(1-\theta_1)\end{bmatrix}$$

۳-۳ عملکرد الگوریتم با داده‌های ناکامل

یکی از شرایطی که در یادگیری پارامتری یک شبکه بیزی بایستی مد نظر قرار گیرد، وجود داده‌های ناکامل است. داده‌هایی که به دلایل مختلف نظیر ناقص و یا نویزی‌بودن، بی‌معنی بودن و نظایر آن در یادگیری قابل استفاده نیستند. الگوریتم جدید ارائه‌شده قادر است رفتار الگوریتم EM را تقلید کند و از این نظر دقتی برابر با EM دارد و نحوه کار بسیار ساده است. در هر نمونه‌ای که برای یادگیری استفاده می‌شود، چنانچه داده‌ای وجود نداشت، داده تصادفی- معادل با اقدام تصادفی- انتخاب‌شده توسط آتاماتای یادگیر به عنوان داده جایگزین انتخاب شده و این مقدار در نمونه مورد آموزش، جایگزین مقدار ناموجود می‌شود.

۴- بررسی نتایج عملی

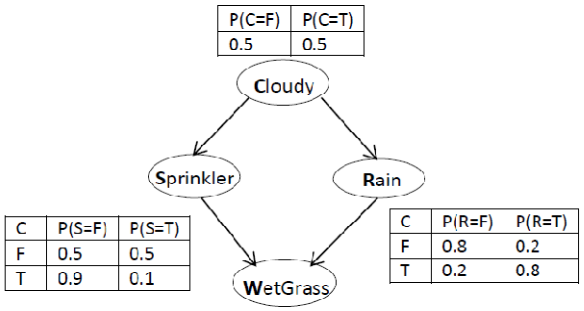
برای بررسی نحوه عملکرد روش جدید پیشنهادی از شبکه‌های بیزی نمونه استفاده شده و روش کار به این صورت است که یک شبکه بیزی پارامتری‌شده انتخاب گردیده و از روی آن نمونه‌هایی گرفته شده است. سپس یک شبکه بیزی پارامتری‌نشده با استفاده از این نمونه‌ها آموزش داده شده است. برای آموزش شبکه‌های بیزی از جعبه ابزار BNT که توسط Murphy [۲۰] برای این منظور در Matlab طراحی شده، استفاده کرده‌ایم. روش جدید پیشنهادی نیز توسط Matlab پیاده‌سازی شده و برای مقایسه روش جدید با روش تخمین بیزی از شاخص ضریب همبستگی استفاده شده است.

ضریب همبستگی: این شاخص، هماهنگی و وابستگی میان دو بردار هم‌اندازه را توصیف می‌کند. اگر بردار X کلیه مقادیر توزیع‌های احتمالی حاصل از الگوریتم مبتنی بر DLA را برای یک گره خاص در شبکه بیزی نشان دهد (با یک ترتیب مشخص) و بردار Y مقادیر واقعی توزیع‌های احتمالی همان گره را (با همان ترتیب) نشان دهد، در این صورت ضریب همبستگی میان X و Y می‌تواند شاخصی از نحوه عملکرد الگوریتم به دست دهد. بدین ترتیب که هرچه دو بردار X و Y به یکدیگر شبیه‌تر باشند، این عدد به ۱ نزدیک‌تر شده و نشان می‌دهد که الگوریتم بهتر عمل کرده و علاوه بر این، نحوه تغییرات این دو در طول آموزش می‌تواند شاخصی از نحوه همگرایی الگوریتم باشد. مقدار Correlation میان دو بردار X و Y بر اساس (۱۳) تعریف می‌گردد

$$\rho_{X,Y}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}\sqrt{E(Y^2)-E^2(Y)}}=$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \qquad (13)$$

۵- بررسی تجربی

برای بررسی مقدماتی عملکرد الگوریتم پیشنهادی ، از یک شبکه ساده بیزی با ۴ گره استفاده کرده‌ایم (شکل ۳). الگوریتم پیشنهادی پارامترهای متعددی دارد که در جدول ۲ خلاصه‌ای از آنها را مشاهده می‌کنید. برای بررسی الگوریتم از یک نمونه ۵۰۰تایی از داده‌ها استفاده کرده‌ایم.

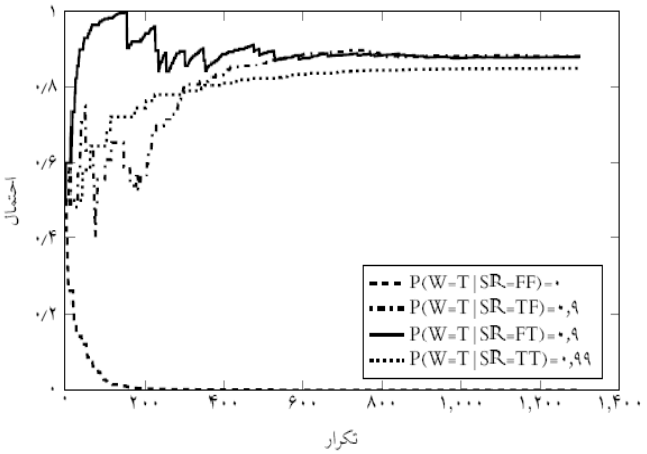


C	P(S=F)	P(S=T)
F	0.5	0.5
T	0.9	0.1

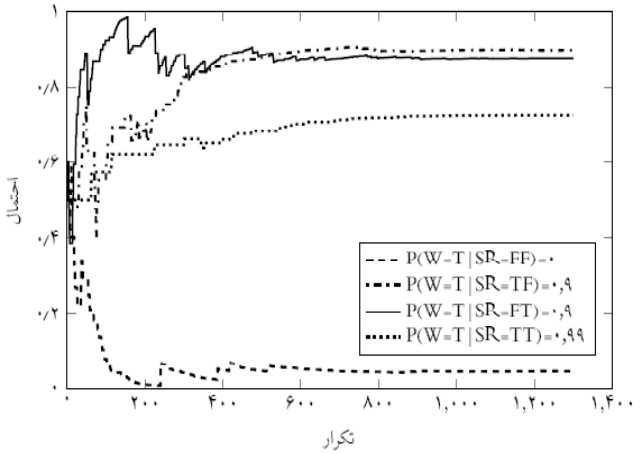
C	P(R=F)	P(R=T)
F	0.8	0.2
T	0.2	0.8

S	R	P(W=F)	P(W=T)
F	F	1	0.0
T	F	0.1	0.9
F	T	0.1	0.9
T	T	0.01	0.99

شکل ۳: شبکه نمونه.



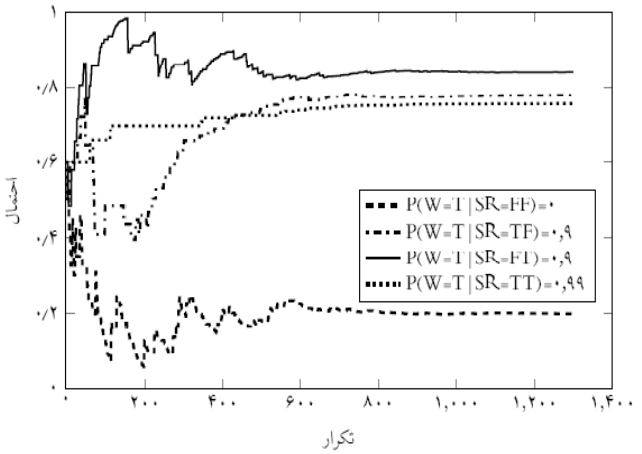
شکل ۴: نحوه همگرایی بردار احتمال انتخاب اقدام‌های آتاماتای متناظر با گره WetGrass به توزیع متناظر در شبکه بیزی مثال با داده کامل.



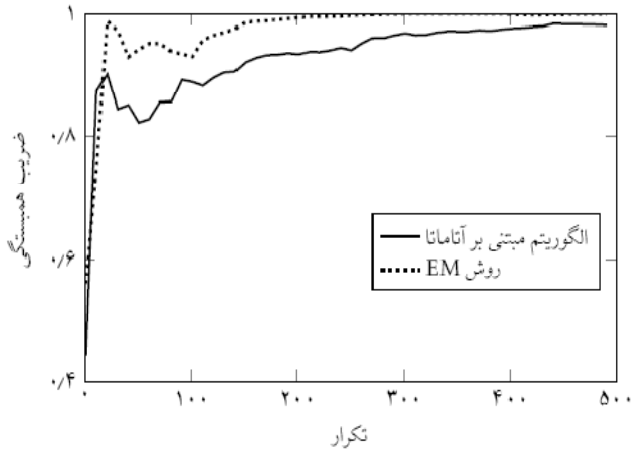
شکل ۵: نحوه همگرایی بردار احتمال انتخاب اقدام‌های آتاماتای متناظر با گره WetGrass به توزیع متناظر در شبکه بیزی مثال با ۱۰٪ داده ناموجود.

در شکل ۴ نحوه همگرایی مقادیر مربوط به گره WetGrass را مشاهده می‌کنید. در مراحل بعدی الگوریتم پیشنهادی روی داده‌های نمونه ورودی با ۱۰٪ و ۳۰٪ نویز اعمال شد (داده ناموجود). نتایج یادگیری به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده و شاخص correlation برای WetGrass در حالت داده کامل در شکل ۷ آمده است.

شبکه ICU Alarm را که یک شبکه بیزین با ۳۷ گره و ۵۰۹ پارامتر است، برای بررسی عملکرد الگوریتم در شبکه‌های بزرگ در نظر می‌گیریم. این شبکه یکی از نمونه‌های واقعی و بزرگ شبکه‌های بیزی



شکل ۶: بررسی نحوه همگرایی مقادیر بردار احتمال اقدام‌های آتاماتای گره WetGrass به توزیع متناظر در شبکه بیزی مثال با ۳۰٪ داده ناموجود.

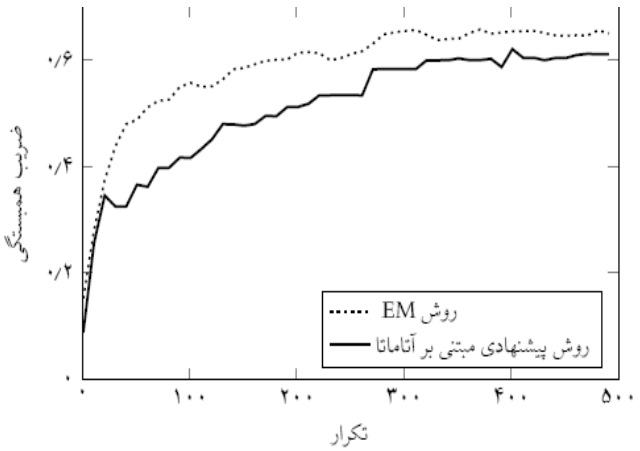


شکل ۷: مقایسه ضریب همبستگی بین بردار احتمال گره WetGrass و بردارهای حاصل از DLA و روش تخمین بیزی.

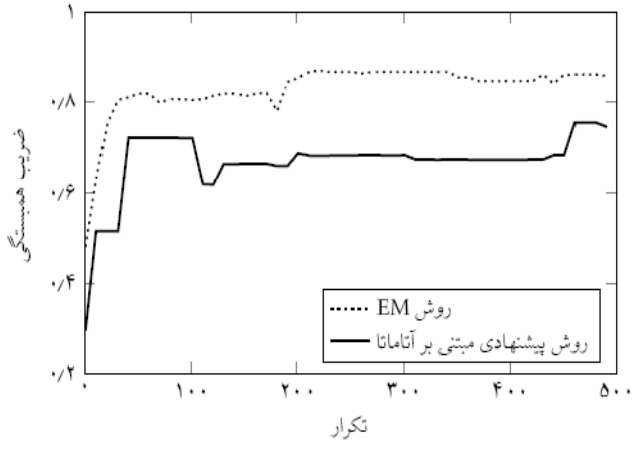
است و توسط [۲۱] معرفی گردیده و مدل مورد استفاده در این مقاله از [۲۲] گرفته شده است. برای بررسی نحوه عملکرد الگوریتم پیشنهادی و مقایسه آن با الگوریتم EM از هر کدام از شبکه‌های موجود یک نمونه ۵۰۰تایی انتخاب شد. سپس به صورت هم‌زمان روی دو شبکه بیزی با ساختارهایی یکسان با ساختار شبکه بیزی مورد استفاده، عملیات یادگیری پارامتری با دو روش تخمین بیزی و روش جدید مبتنی بر آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته، انجام شد. نمودار مقایسه شاخص را برای دو گره ۲۶ و ۲۸ در شکل ۸ و شکل ۹ آورده‌ایم. در مورد اکثر گره‌ها وضع به همین شکل است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک چارچوب مبتنی بر شبکه‌ای از آتاماتاهای یادگیر، موسوم به آتاماتای یادگیر توزیع‌شده برای مسأله یادگیری پارامتری شبکه‌های بیزی ارائه شد. نتایج بررسی ریاضی و عملکرد الگوریتم روی شبکه‌های نمونه حاکی از برابری دقت این روش با روش‌های موجود است. علاوه بر این که به دلیل استفاده از روابط خطی مورد استفاده در آتاماتای یادگیر، روش جدید پیشنهادی از سربار محاسباتی کمی برخوردار است. قابلیت استفاده آنلاین الگوریتم، قابلیت تطبیق الگوریتم با شرایطی که داده‌های ناموجود در نمونه‌ها موجود باشند، افتراقی‌بودن روش و قابلیت استفاده مکرر از نمونه‌ها برای تنظیم‌کردن مقادیر پارامترها، همگی از ویژگی‌های روش جدید مبتنی بر آتاماتا هستند.



شکل ۸: مقایسه شاخص ضریب همبستگی میان بردار واقعی و بردار یاد گرفته شده در گره شماره ۲۸ از ICUAlarm.



شکل ۹: مقایسه شاخص ضریب همبستگی میان بردار واقعی و بردار یاد گرفته شده در گره شماره ۲۶ از ICUAlarm.

جدول ۲: پارامترهای مورد استفاده در آموزش آتاماتای یادگیر توزیع‌شده توسعه‌یافته.

پارامتر	مفهوم	مقادیر
Train_type	نحوه استفاده از نمونه‌ها: تکراری یا بدون تکرار	{normal, repeat}
Repeat_no	در صورتی که استفاده تکراری از نمونه‌ها مجاز باشد، تعداد دفعات تکرار را مشخص می‌کند	۱,۲, …
Random_Select	داده‌های نمونه را به ترتیب مورد استفاده قرار دهیم یا انتخاب تصادفی ممکن است	{yes, no}
a	مقدار اولیه پارامتر یادگیری که برای کلیه آتاماتاها به صورت یکسان مقداردهی می‌شود	$a \in (۰,۱)$
Update(a)	تابعی که نحوه تنظیم‌کردن مقدار a را پس از هر دور یادگیری نشان می‌دهد	–

مراجع

[1] F. V. Jensen and T. D. Nielsen, *Bayesian Networks and Decision Graphs*, Springer, 2007.

[2] D. Heckerman and D. M. Chickering, "Learning bayesian networks: the combination of knowledge and statistical data metrics for belief networks," *Mach. Learn.*, vol. 20, no. 3, pp. 197-243, 1995.

[3] M. L. Thathachar and P. S. Sastry, "Varieties of learning automata: an overview," *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. B. Cybern.*, vol. 32, no. 6, pp. 711-722, Jan. 2002.

[4] K. S. Narendra and M. A. L. Thathachar, "Larning automata: a survey," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. - Part A Syst. Humans*, vol. 14, no. 4, pp. 323-334, Jul. 1974.

[5] H. Beigy and M. Meybodi, Intelligent Channel Assignment in Cellular Networks: A Learning Automata Approach, Amirkabir University of Technology, 2004.

[6] A. S. Poznyak and K. Najim, Learning Automata and Stochastic Optimization (Lecture Notes in Control and Information Sciences), vol. 225, London: Springer - Verlag, 1997.

[7] H. Beigy and M. R. Meybodi, "Utilizing distributed learning automata to solve stochastic shortest path problems," *Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge - Based Syst.*, vol. 14, no. 5, pp. 591-615, Oct. 2006.

[8] M. R. Mollakhalili Meybodi and M. R. Meybodi, "A new distributed learning automata based algorithm for solving stochastic shortest path," in *Proc. 6th Conf. on Intelligent Systems*, Nov. 26-27, 2004.

[9] M. R. Meybodi and H. Beigy, "A sampling method based on distributed learning automata," in *Proc. 10th Iranian Conf. on Electrical Engineering*, vol. 1, pp. 618-626, May 2002.

[10] A. Motevalian and M. R. Meybodi, "Solving maximal independent set problem using distributed learning automata," in *Proc.14th Iranian Electrical Engineering Conf., ICEE 2006*, vol. 1, Tehran, Iran, 16-18 May 2006.

[11] A. Alipour and M. R. Meybodi, "Solving traveling salesman problem using distributed learning automata," in *Proc. 10th Annual CSI Computer Conf.*, pp. 759-761, Tehran, Iran, Feb. 2005.

[12] A. Baradaran Hashemi and M. R. Meybodi, "Web usage mining using distributed learning automata," in *Proc. 12th Annual CSI Computer Conf. of Iran*, pp. 553-560, Tehran, Iran, 20-22 Feb. 2007.

[13] M. R. Mollakhalili Meybodi and M. R. Meybodi, "A distributed learning automata based approach for user modeling in adaptive hypermedia," in *Proc. Congress on Electrical, Computer, and Information Technology*, Mashhad, Iran, 7-9 Nov. 2012.

[14] M. R. Mollakhalili Meybodi and M. R. Meybodi, "Link prediction in adaptive web sites using distributed learning automata," in *Proc. 13th Annual CSI Computer Conf. of Iran*, 6 pp., Kish Island, Iran, March 9-11, 2008.

[15] B. Anari and M. R. Meybodi, "A method based on distributed learning automata for determining web documents structure," in *proc. 12th Annual CSI Computer Conf. of Iran*, pp. 2276-2282, 20-22 Feb.. 2007.

[16] E. Bauer, D. Koller, and Y. Singer, "Update rules for parameter estimation in bayesian networks," in *Proc. of the 13th Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence, UAI1997*, pp. 3-13, 1997.

[17] I. Cohen, A. Bronstein, F. G. Cozman, and N. M. A. Urbana, *Online Learning of Bayesian Network Parameters*, Technical Report, 2001.

[18] N. A. Rezvani and M. R. Meybodi, "A learning automata - based technique for training conditional probability tables of bayesian network," in *Proc. 14th National Conf. of Iran Computer Society, CSICC'09*, Tehran, Iran, 2009.

[19] M. R. Mollakhalili Meybodi and M. R. Meybodi, "Extended distributed learning automata: a new method for solving stochastic graph optimization problems," vol. 41, no. 3, pp. 923-940, Aug. 2013.

[20] P. Murphy Kevin, An Introduction to Graphical Models, 2001.

[21] C. B. G., G. Suermondt, and R. Chavez, "The ALARM monitoring system: a case study with two probabilistic inference techniques for belief networks," in *Proc. 2nd European Conf. on AI and Medicine*, vol. 38, pp. 247-256, 1989.

[22] "Bayesian network repository," [Online]. Available: http://www.cs.huji.ac.il/~galel/Repository.

محمدرضا ملاخلیلی میبدی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۰ و ۱۳۸۲ از دانشگاه‌های شهید بهشتی و صنعتی امیرکبیر تهران و دکترای مهندسی کامپیوتر را در سال ۱۳۹۳ در واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد به پایان رسانده است. وی هم‌اکنون عضو هیأت‌علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد میبد است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: شبکه‌های کامپیوتری و وب، شبکه‌های مبتنی بر نرم‌افزار، محاسبات نرم و کاربردهای آن، یادگیری والگوریتم‌ها، گراف‌های تصادفی و شبکه‌های پیچیده.

محمدرضا میبدی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد اقتصاد به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۵۲ و ۱۳۵۶ از دانشگاه شهید بهشتی و در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری علوم کامپیوتر به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۵۹ و ۱۳۶۲ از دانشگاه اوکلاهمای آمریکا به پایان رسانده است و هم‌اکنون استاد دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر می‌باشد. نام‌برده قبل از پیوستنش به دانشگاه صنعتی امیرکبیر در سال‌های ۱۳۶۲ الی ۱۳۶۴ استادیار دانشگاه میشیگان غربی و در سال‌های ۱۳۶۴ الی ۱۳۷۰ دانشیار دانشگاه اوهایو در ایالات متحده آمریکا بوده است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: الگوریتم‌های موازی، پردازش موازی، محاسبات نرم و کاربردهای آن، شبکه‌های کامپیوتری و مهندسی نرم‌افزار.