

الگوریتم اولیه - دوگانه توزیع شده با پارامترهای متغیر و ساختار مشارکتی افزایشی دو جهته

قنبر آذرینا

به کاربرد آن در جمع‌آوری داده و مسیریابی اشاره کرد [۱۲] تا [۱۵]. در [۱۶] حسگری فشرده در شبکه‌های حسگری بی‌سیم از نقطه نظر تشخیص ساپورت (مکان ورودی‌های غیرصفر در یک سیگنال تنک) مورد توجه قرار گرفته است.

در [۱۷] یک الگوریتم حسگری فشرده توزیع شده بیزین مبتنی بر مدل پیشنهاد شده که از هر دو همبستگی درون سیگنالی و بین سیگنالی برای بازیابی توأم چندین سیگنال تنک استفاده می‌کند.

در [۱۸] بازیابی داده‌های ازدست‌رفته چندین سیگنال با نسبت تلفات متغیر بررسی شده و برای این منظور، [۱۸] همبستگی بین سیگنالی را مورد توجه قرار داده و از حسگری فشرده توزیع شده بهره گرفته است.

در [۱۹] یک روش بیزین برای بازیابی توزیع شده سیگنال‌های تنک ارائه گردیده که نسبت به توزیع ساپورت، وفقی بوده و نیازی به معلوم بودن توزیع ساپورت ندارد. در شیوه پیشنهادی [۱۹] در شبکه‌ای از حسگرها، بازسازی یک سیگنال تنک به‌طور مشارکتی و بر اساس مد همکاری افزایشی انجام می‌گیرد. در این روش، هر گره معیار تشخیص ساپورت غالب را از گره قبلی خود دریافت، مقدار معیار تشخیص ساپورت غالب خود را به آن اضافه و نتیجه را به گره بعدی ارسال می‌کند. در آخرین گره حلقه، داده‌های کل شبکه برای تصمیم‌گیری در مورد ساپورت غالب مورد استفاده قرار می‌گیرد که این بهره‌گیری از دایورسیتی مکانی در فرایند تشخیص ساپورت عملکرد برتری نتیجه می‌دهد.

در [۳] یک الگوریتم بازسازی حسگری فشرده توزیع شده با مشارکت همه گره‌های شبکه ارائه گردیده که در آن، عملکرد حالت دائم بهتر و پیچیدگی پایین محاسباتی، مهم‌ترین مشخصه این الگوریتم به شمار می‌رود. الگوریتم پیشنهادی [۳] یک الگوریتم بازگشتی اولیه - دوگانه است که با بهینه‌سازی ضرایب لاگرانژ حاصل شده است. این الگوریتم در چهارچوب مد مشارکتی افزایشی دو جهته ارائه گردیده که در آن هر حسگر در هر تکرار تنها با دو گره همسایه خود به تبادل داده می‌پردازد. لذا در مقایسه با ساختار مشارکتی نفوذی [۱۰] که در آن هر حسگر با تمام گره‌های همسایه خود به تبادل داده می‌پردازد، شیوه پیشنهادی [۳] به میزان قابل ملاحظه‌ای مصرف توان پایین‌تری دارد. شیوه پیشنهادی [۳] یک چهارچوب توزیع شده جامع برای بازسازی سیگنال‌های تنک در شبکه‌های حسگری بی‌سیم است که می‌توان آن را در قالب مسائل بهینه‌سازی محدب متفاوتی پیاده کرد. مزیت مسائل محدب نسبت به مسائل غیرمحدب این است که در مسائل بهینه‌سازی محدب، یک بهینه مطلق را می‌توان در اکثر موارد با دقت خوب در مدت زمانی معقول و مستقل از مقاداردهی اولیه محاسبه کرد.

نقطه ضعف الگوریتم ارائه شده در [۳] وجود پارامترهایی است که نحوه انتخاب آنها تأثیر مستقیمی بر همگرایی و سرعت همگرایی این الگوریتم

چکیده: به دلیل شرایط خاص شبکه‌های حسگری بی‌سیم از نقطه‌نظری نظیر محدودیت انرژی، تسریع سرعت همگرایی الگوریتم‌های این حوزه اهمیت پیدا می‌کند. این امر در مورد حسگری فشرده توزیع شده که فاز بازسازی پیچیده‌ای دارد، ضروری‌تر به نظر می‌رسد. بر همین اساس در این مقاله، الگوریتم بازسازی حسگری فشرده توزیع شده‌ای ارائه می‌شود که امکان بازسازی با نرخ همگرایی بهبود یافته‌تری را میسر می‌سازد. الگوریتم پیشنهادی، یک الگوریتم اولیه - دوگانه توزیع شده در یک ساختار افزایشی دو جهته است که در آن پارامترها با زمان تغییر می‌کنند. تغییرات پارامترها به صورت ضابطه‌مند و برای آن دسته از مسائل بهینه‌سازی محدب انجام می‌گیرد که در آنها توابعی که بیان‌کننده قید مسئله و مدل‌کننده مشارکت بین گره‌ها هستند، قویاً محدب می‌باشند. شیوه پیشنهادی با شبیه‌سازی‌هایی تضمین شده که نشان از عملکرد بالای الگوریتم پیشنهادی به لحاظ سرعت همگرایی، حتی در شرایط سختگیرانه‌تری نظیر تعداد اندک اندازه‌گیری‌ها و یا درجه تنکی پایین‌تر دارد.

کلیدواژه: الگوریتم پارامتر متغیر، بازسازی توزیع شده، حسگری فشرده، مد افزایشی دو جهته.

۱ - مقدمه

محدودیت‌های توان و پهنای باند در شبکه‌های حسگری بی‌سیم، طراحی‌ها، پیکربندی‌ها و الگوریتم‌های مرتبط با چنین شبکه‌هایی را به چالش کشیده است [۱] تا [۵]. برای رفع این چالش، پردازش‌های توزیع شده و مشارکتی [۶] و [۷] در قالب توپولوژی‌های مختلف [۸] در شبکه‌های حسگری بی‌سیم مورد توجه قرار گرفته است.

در برخی از کاربردهای شبکه‌های حسگری بی‌سیم، سیگنال‌ها اغلب نوعی ساختار را شامل می‌شوند که پردازش و نمایش هوشمند را برای آنها ممکن می‌سازد. ساختاری که اخیراً در این قبیل شبکه‌ها مورد توجه قرار گرفته است، تنکی^۱ سیگنال مورد پردازش می‌باشد [۹]. سیگنال تنک، سیگنالی است که اکثر درایه‌های آن صفر باشد. در یک بیان دیگر، یک سیگنال s - تنک نامیده می‌شود، اگر حداکثر s درایه غیرصفر را شامل شود. این ویژگی از سیگنال به استفاده توزیع شده از تکنیک حسگری فشرده^۲ در شبکه‌های حسگری بی‌سیم انجامیده است [۱۰] و [۱۱]. از جمله کاربردهای حسگری فشرده در شبکه‌های حسگری بی‌سیم می‌توان

این مقاله در تاریخ ۳۰ شهریور ماه ۱۴۰۱ دریافت و در تاریخ ۱۷ دی ماه ۱۴۰۱ بازنگری شد.

قنبر آذرینا (نویسنده مسئول)، دانشکده فنی و مهندسی خوی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران، (email: g.azarnia@uut.ac.ir).

1. Sparsity
2. Compressive Sensing

مشارکتی و توزیعی را دارا باشند؛ موردی که بر چالش طرح الگوریتم‌های بازسازی در این چهارچوب می‌افزاید. یکی از چنین الگوریتم‌های کارایی در [۳] ارائه شده که در ادامه به معرفی این الگوریتم خواهیم پرداخت.

۲-۲ الگوریتم اولیه- دوگانه توزیعی با توپولوژی افزایشی دوجهته

یک شبکه حسگری بی‌سیم شامل J حسگر را در نظر می‌گیریم. مأموریت این شبکه آن است که هر حسگر با داشتن بردار اندازه‌گیری $y_i \in \mathbb{C}^m$ و ماتریس اندازه‌گیری $A_i \in \mathbb{C}^{m \times N}$ سیگنال s -تک $x \in \mathbb{C}^N$ را به نحوی بازسازی کند که $y_i = A_i x$ با $m \ll N$ برقرار باشد. برای این منظور، [۳] مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر گرفته است

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_J \in \mathbb{C}^N} \sum_{i=1}^J [G(x_i) + F(A_i x_i) + H(A_i x_{i-1})] \quad (1)$$

که $G: \mathbb{C}^N \rightarrow (-\infty, \infty]$ و $F, H: \mathbb{C}^m \rightarrow (-\infty, \infty]$ توابع محدب، نیمه‌پیوسته پایین‌تر^۲ و حقیقی‌مقدار تعمیم‌یافته^۳ هستند. همچنین متغیر محلی $x_i \in \mathbb{C}^N$ به‌عنوان تخمینی برای سیگنال x در گره i در نظر گرفته شده و فرض گردیده که $x_i = x_{i-1}$ است. مسئله (۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\min_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_J \in \mathbb{C}^N \\ z_1, z_2, \dots, z_J \in \mathbb{C}^m \\ u_1, u_2, \dots, u_J \in \mathbb{C}^m}} \sum_{i=1}^J [G(x_i) + F(z_i) + H(u_{i-1})] \quad (2)$$

$$\text{subject to } z_i = A_i x_i, u_{i-1} = A_i x_{i-1}$$

لاگرانژین مسئله (۲) عبارت است از

$$L(x_i, z_i, u_i, \xi_i, v_i, i = 1, 2, \dots, J) = \sum_{i=1}^J [G(x_i) + F(z_i) + \text{Re}\langle A_i^* \xi_i, x_i \rangle - \text{Re}\langle \xi_i, z_i \rangle + H(u_{i-1}) + \text{Re}\langle A_i^* v_i, x_{i-1} \rangle - \text{Re}\langle v_i, u_{i-1} \rangle] \quad (3)$$

که در آن $\xi_i, v_i \in \mathbb{C}^m$. مقدار تابع لاگرانژ در نقاط بهینه آن، همان مقدار بهینه مسئله saddle-point زیر است

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_J \in \mathbb{C}^N} \max_{\substack{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_J \in \mathbb{C}^m \\ v_1, v_2, \dots, v_J \in \mathbb{C}^m}} \sum_{i=1}^J [G(x_i) + \text{Re}\langle A_i^* \xi_i, x_i \rangle + \text{Re}\langle A_i^* v_i, x_{i-1} \rangle - F^*(\xi_i) - H^*(v_i)] \quad (4)$$

در (۴)، F^* و H^* به ترتیب مزدوج محدب^۴ توابع F و H هستند. مزدوج محدب یک تابع نوعی مثل F به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{C}^N} \{\text{Re}\langle x, y \rangle - F(x)\} \quad (5)$$

در [۳] یک رویکرد بازگشتی برای حل مسئله (۴) به‌صورت زیر آمده است

$$\begin{aligned} \eta_i, \gamma_i, \tau_i > 0, \mu_i \in [0, 1], \bar{x}_i &= x_i \\ \xi_i^{n+1} &= P_{F^*}(\eta_i; \xi_i^n + \eta_i A_i \bar{x}_i^n) \\ v_i^{n+1} &= P_{H^*}(\gamma_i; v_i^n + \gamma_i A_i \bar{x}_{i-1}^n) \\ x_i^{n+1} &= P_G(\tau_i; x_i^n - \tau_i (A_i^* \xi_i^{n+1} + A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1})) \\ \bar{x}_i^{n+1} &= x_i^{n+1} + \mu_i (x_i^{n+1} - x_i^n) \end{aligned} \quad (6)$$

دارد. در اینجا قصد داریم تا نحوه انتخاب این پارامترها را در راستای تسریع‌بخشیدن به سرعت همگرایی این الگوریتم فرمول‌بندی کنیم. در این مقاله، تحلیلی ریاضی پیرامون شیوه ارائه‌شده در [۳] را ارائه خواهیم داد. در نتیجه تحلیل انجام‌گرفته، اولاً شرایط لازم برای همگرایی این الگوریتم استخراج خواهد شد و ثانیاً روابطی بازگشتی برای پارامترهای اساسی این الگوریتم ارائه خواهیم داد که انتخاب پارامترها بر اساس این روابط، همگرایی الگوریتم را تسریع خواهد نمود. شیوه پارامتر متغیر پیشنهادی می‌تواند در قالب تمام آن دسته از مسائل بهینه‌سازی پیاده شود که در آنها توابعی که بیان‌کننده قید مسئله و مدل‌کننده مشارکت بین گره‌ها هستند، قویاً محدب^۱ باشند.

مطالعات ما نشان دادند که در [۲۰]، الگوریتمی برای تسریع همگرایی مسائل بهینه‌سازی محدب اولیه- دوگانه و برای مسائلی که درجه‌ای از همواری را شامل می‌شوند، ارائه گردیده است. اما شیوه [۲۰] با روش پیشنهادی ما در این مقاله تفاوت‌های اساسی دارد. نخست اینکه الگوریتم پیشنهادی [۲۰] شیوه توزیع‌شده‌ای نبوده و برای بازسازی یک سیگنال به‌صورت غیرمشارکتی در یک گره منفرد می‌تواند کاربرد داشته باشد؛ حال آنکه شیوه پیشنهادی ما در قالب شبکه‌های حسگری بیان شده است. همین امر، تحلیل‌های صورت‌گرفته در این مقاله را پرچالش‌تر کرده و باید در تحلیل‌های ریاضی انجام‌گرفته، اثر مشارکت بین گره‌ها را نیز منظور کنیم. همچنین در نتیجه مشارکت بین گره‌ها پارامتر دیگری وارد الگوریتم پیشنهادی [۳] شده که استخراج قیدهایی برای این پارامتر به‌منظور تضمین همگرایی الگوریتم و یافتن رابطه‌ای برای این پارامتر در کنار دیگر پارامترها برای تسریع همگرایی الگوریتم، خود چالش دیگری است.

۲- مسئله حسگری فشرده

۱-۲ بیان مسئله

از جمله مسائل عملی پرکاربرد در پردازش سیگنال، مسئله بازسازی سیگنال $x \in \mathbb{C}^N$ از داده مشاهده‌شده $y = Ax \in \mathbb{C}^m$ است که در آن ماتریس حسگری $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ فرایند اندازه‌گیری خطی را مدل می‌کند. مادامی که $m \geq N$ باشد، این مسئله یک مسئله مرسوم در جبر کلاسیک خطی بوده و با روش‌های کلاسیک قابل حل است. اما زمانی که تعداد مشاهدات m کمتر از طول N سیگنال x باشد، بدون اطلاعات اضافی‌تر، بازسازی x از مشاهدات ممکن نخواهد بود. یکی از فرضیاتی که بازسازی سیگنال مطلوب x را در چنین شرایطی ممکن می‌سازد، تنگی این سیگنال است به این معنا که اکثر درایه‌های x صفر باشد. تحت فرض تنگی، الگوریتم ℓ_1 -Minimization - تنک‌ترین برداری را نتیجه خواهد داد که با داده مشاهده‌شده $y = Ax$ سازگار باشد. اما از آنجایی که این الگوریتم در حالت کلی یک مسئله NP-hard است، الگوریتم‌های کارایی با قابلیت پیاده‌سازی در حسگری فشرده ارائه گردیده‌اند. این الگوریتم‌ها را می‌توان در چند دسته جای داد: شیوه‌های بهینه‌سازی محدب [۱۰]، روش‌های حریصانه، روش‌های مبتنی بر آستانه [۸]، شیوه‌های بهینه‌سازی غیرمحدب، الگوریتم‌های ترکیبی یا زیرخطی و روش‌های آماری [۱۷].

وقتی مسئله حسگری فشرده در چهارچوب شبکه‌های سنسوری بی‌سیم مطرح می‌شود، الگوریتم‌های بازسازی سازگار یافته برای این چهارچوب، علاوه بر اینکه باید به‌طور منطقی سریع باشند، باید قابلیت پیاده‌سازی

2. Lower Semicontinuous
3. Extended Real-Valued
4. Convex Conjugate

1. Strongly Convex

در این الگوریتم $P_G(\tau; z)$ نگاشت پروگزیمال^۱ تابع G بوده و به صورت زیر تعریف می شود

$$P_G(\tau; z) = \arg \min_{x \in \mathbb{C}^N} \left\{ \tau G(x) + \frac{1}{\tau} \|x - z\|_{\tau}^2 \right\} \quad (۷)$$

همچنین نگاشت پروگزیمال F^* و H^* می تواند مستقیماً توسط (۷) و یا با استفاده از اتحاد Moreau به صورت زیر حساب شود

$$P_{F^*}(\eta; z) + \eta P_F(\eta^{-1}; z/\eta) = z \quad (۸)$$

در الگوریتم پیشنهادی [۳] نحوه انتخاب پارامترهای $\eta_i, \gamma_i, \tau_i, \mu_i$ تأثیر مستقیمی بر همگرایی و سرعت همگرایی این الگوریتم دارد. به همین دلیل در ادامه الگوریتمی با پارامترهای متغیر با زمان $\eta_i^n, \gamma_i^n, \tau_i^n$ و μ_i^n ارائه خواهیم کرد که انتخاب پارامترها بر اساس این روابط همگرایی الگوریتم را تسریع خواهد بخشید. در پیشنهاد این الگوریتم چنین فرض کرده ایم که F^* و H^* قویاً محدب باشند.

۳- الگوریتم پارامتر متغیر پیشنهادی

در این بخش به ارائه الگوریتم پارامتر متغیری خواهیم پرداخت که می تواند عملکرد الگوریتم [۳] را ارتقا ببخشد. به منظور ارائه الگوریتم پیشنهادی، نخست به ارائه لم و قضیه ای خواهیم پرداخت که پایه های منطقی برای ارائه الگوریتم پیشنهادی را بنا می کنند.

لم ۱: فرض کنیم که F^* و H^* هر دو قویاً محدب با پارامترهای تحدب قوی $\alpha_i > 0$ و $\beta_i > 0$ باشند. در این صورت با در نظر گرفتن پارامترهای متغیر با زمان $\eta_i^n, \gamma_i^n, \tau_i^n$ و μ_i^n ، تکرارهای (۶) رابطه زیر را در نقطه بهینه $x_i^{\#}, \xi_i^{\#}, v_i^{\#}, i = 1, 2, \dots, J$ برآورده خواهند کرد

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{\#} - x_i^n\|_{\tau}^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^{\#} - \xi_i^n\|_{\tau}^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^{\#} - v_i^n\|_{\tau}^2}{\gamma_i^n} \geq \\ & \sum_{i=1}^J \frac{\tau_i^{n+1}}{\tau_i^n} \frac{\|x_i^{\#} - x_i^{n+1}\|_{\tau}^2}{\tau_i^{n+1}} + \\ & \sum_{i=1}^J (\alpha_i + \eta_i^n) \frac{\eta_i^{n+1}}{\eta_i^n} \frac{\|\xi_i^{\#} - \xi_i^{n+1}\|_{\tau}^2}{\eta_i^{n+1}} + \\ & \sum_{i=1}^J (\beta_i + \gamma_i^n) \frac{\gamma_i^{n+1}}{\gamma_i^n} \frac{\|v_i^{\#} - v_i^{n+1}\|_{\tau}^2}{\gamma_i^{n+1}} + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n+1} - x_i^n\|_{\tau}^2}{\tau_i^n} - \\ & \sum_{i=1}^J (\mu_i^n)^{\tau} (\|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^{\tau} \eta_i^n + \|A_{i+1}\|_{\tau \rightarrow \tau}^{\tau} \gamma_i^n) \|x_i^{n-1} - x_i^n\|_{\tau}^2 + \\ & \tau \sum_{i=1}^J \operatorname{Re} \langle A_i^* (\xi_i^{\#} - \xi_i^{n+1}), (x_i^n - x_i^{n+1}) \rangle - \\ & \tau \sum_{i=1}^J \mu_i^n \operatorname{Re} \langle A_i^* (\xi_i^{\#} - \xi_i^n), (x_i^{n-1} - x_i^n) \rangle + \\ & \tau \sum_{i=1}^J \operatorname{Re} \langle A_i^* (v_i^{\#} - v_i^{n+1}), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^{n+1}) \rangle - \\ & \tau \sum_{i=1}^J \mu_{i-1}^n \operatorname{Re} \langle A_i^* (v_i^{\#} - v_i^n), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle \end{aligned} \quad (۹)$$

اثبات: به پیوست الف مراجعه شود.

قضیه ۱: فرض کنیم که F^* و H^* هر دو قویاً محدب با پارامترهای تحدب قوی $\alpha_i > 0$ و $\beta_i > 0$ باشند. انتخاب های زیر را انجام می دهیم

1. Proximal Mapping

$$\begin{aligned} \frac{\eta_i^n}{\eta_i^{n+1}} &= \frac{1}{\mu_{\gamma, i}^{n+1}} \\ \frac{\gamma_i^n}{\gamma_i^{n+1}} &= \frac{1}{\mu_{\tau, i}^{n+1}} \\ \frac{\tau_i^n}{\tau_i^{n+1}} &= \frac{1}{\mu_i^{n+1}} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma, i}^{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_i \eta_i^n}} \\ \mu_{\tau, i}^{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_i \gamma_i^n}} \\ \mu_i^{n+1} &= \max \{ \mu_{\gamma, i}^{n+1}, \mu_{\tau, i}^{n+1} \} \end{aligned}$$

و قیدهای زیر را اعمال می کنیم

$$\begin{aligned} \tau_i \eta_i \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^{\tau} &\leq \frac{1}{\tau} \\ \tau_i \gamma_{i+1} \|A_{i+1}\|_{\tau \rightarrow \tau}^{\tau} &\leq \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

در این صورت تکرارهای $x_i^n, \xi_i^n, v_i^n, i = 1, 2, \dots, J$ از الگوریتم (۶) کراندار خواهند ماند.

اثبات: به پیوست ب مراجعه شود.

قضیه ۱، برهان لازم برای ارائه الگوریتم پیشنهادی را فراهم می آورد به این معنا که می توان پارامترهای $\eta_i, \gamma_i, \tau_i, \mu_i$ را مطابق (۱۰) متغیر با زمان انتخاب کرد، اما هنوز همگرایی الگوریتم (۶) را از دست نداد، مشروط بر اینکه قیدهای (۱۱) رعایت شوند. بر این اساس، الگوریتم پارامتر متغیر پیشنهادی به صورت زیر ارائه می شود

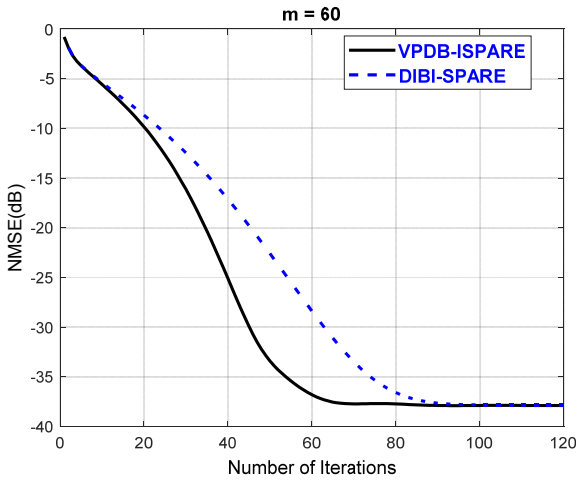
$$\begin{aligned} \eta_i, \gamma_i, \tau_i &> 0, \mu_i \in (0, 1), \bar{x}_i = x_i, \\ \tau_i \eta_i \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^{\tau} &\leq \frac{1}{\tau}, \tau_i \gamma_{i+1} \|A_{i+1}\|_{\tau \rightarrow \tau}^{\tau} \leq \frac{1}{\tau} \\ \xi_i^{n+1} &= P_{F^*}(\eta_i^n; \xi_i^n + \eta_i^n A_i \bar{x}_i^n) \\ v_i^{n+1} &= P_{H^*}(\gamma_i^n; v_i^n + \gamma_i^n A_{i+1} \bar{x}_{i-1}^n) \\ x_i^{n+1} &= P_G(\tau_i^n; x_i^n - \tau_i^n (A_i^* \xi_i^{n+1} + A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1})) \\ \mu_{\gamma, i}^{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_i \eta_i^n}}, \mu_{\tau, i}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_i \gamma_i^n}}, \\ \mu_i^{n+1} &= \max \{ \mu_{\gamma, i}^{n+1}, \mu_{\tau, i}^{n+1} \} \\ \eta_i^{n+1} &= \mu_{\gamma, i}^{n+1} \eta_i^n, \gamma_i^{n+1} = \mu_{\tau, i}^{n+1} \gamma_i^n, \tau_i^{n+1} = \frac{\tau_i^n}{\mu_i^{n+1}}, \\ \bar{x}_i^{n+1} &= x_i^{n+1} + \mu_i^{n+1} (x_i^{n+1} - x_i^n) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

۴- ارزیابی و شبیه سازی الگوریتم پیشنهادی

در این بخش به ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی می پردازیم. برای این منظور مدل تنکی زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} & \text{for all } i \in \{1, 2, \dots, J\} \\ \min_{x_i \in \mathbb{C}^N} & \|x_i\| + \frac{\delta_i}{\tau} \|A_i x_i - y_i\|_{\tau}^2 + \frac{\lambda_i}{\tau} \|A_i x_{i-1} - y_i\|_{\tau}^2 \end{aligned} \quad (۱۳)$$

اولین عبارت (۱۳) تنکی سیگنال، دومین عبارت قید مسئله بهینه سازی و سومین عبارت آن مشارکت بین هر گره و همسایه آن گره را مدل می کند. این مسئله معادل مسئله (۱) و (۲) است که در آن $G(x_i) = \|x_i\|$



شکل ۱: NMSE بر حسب تکرار برای $m = 60$.

الگوریتم بازسازی تنک توزیع شده دوجهته پارامتر متغیر^۲ یا به اختصار VPDB-ISPARE و نقطه مقابل پارامتر ثابت آن را که نتیجه حل (۱۳) بر طبق شیوه ارائه شده در [۳] است، الگوریتم بازسازی تنک توزیع شده دوجهته^۳ یا به اختصار DIBI-SPARE می نامیم. برای ارزیابی الگوریتمها از خطای میانگین مربعات نسبی استفاده خواهیم کرد که به صورت زیر تعریف می شود

$$NMSE = E \left\{ \frac{\|X^\# - X\|_F^2}{\|X\|_F^2} \right\} \quad (18)$$

که در آن $\|X\|_F$ نرم فرینبوس ماتریس X است. ماتریس X از J بار کنار هم قرار گرفتن بردار تنک x ایجاد شده و $X^\#$ ماتریسی است که ستون i ام آن، بردار بازسازی شده توسط گره i است. برای تحقق میانگین موجود در معیار ارزیابی (۱۸) نتایج ۱۰۰ آزمایش مستقل از هم متوسط گیری شده اند. در هر آزمایش، درایه های ماتریس اندازه گیری A_i با توزیع گوسی استاندارد، ایجاد و سپس ستون های این ماتریس نرمالیزه شده اند. به علاوه در هر آزمایش ساپورت بردار تنک x به طور تصادفی و با توزیع یکنواخت انتخاب شده که مؤلفه های غیر صفر آن از توزیع گوسی استاندارد تبعیت می کنند. همچنین مقادیردهی اولیه شبیه سازیها به صورت $\bar{x}_i = 0$ ، $x_i = 0$ ، $\bar{y}_i = 0$ ، $\xi_i = 0$ و $\omega_i = 0$ است. برای پارامتر τ_i مقدار اولیه انتخاب شده اند که قید (۱۱) برآورده گردد. مقادیر این پارامترها در الگوریتم [۳] نیز برابر همین مقادیر اولیه انتخاب شده اند. در الگوریتم [۳] برای μ_i مقدار واحد انتخاب شده و مقادیر پارامترهای دیگر نیز عبارت هستند از $N = 240$ ، $\delta_i = 50$ ، $\lambda_i = 50$ و $J = 30$.

شکل ۱ منحنی NMSE بر حسب تکرار را برای $m = 60$ نشان می دهد که در آن $s = 10$ بوده و $\alpha_i = 0.3/\delta_i$ و $\beta_i = 0.3/\lambda_i$ قرار داده شده اند. همان طور که مشاهده می شود، VPDB-ISPARE حدود ۲۰ تکرار سریع تر از DIBI-SPARE همگرا می شود که به وضوح نشان از عملکرد همگرایی بالای الگوریتم پیشنهادی دارد.

تغییرات τ_i^n و γ_i^n بر حسب تکرار و برای گره #۱ در شکل ۲ نشان داده شده است. منحنی تغییرات η_i^n شبیه γ_i^n بوده و لذا در این شکل

مزدوج محذب F و H عبارتند از $H(u_{i-1}) = \frac{\lambda_i}{\gamma} \|u_{i-1} - y_i\|_r^2$ و $F(z_i) = \frac{\delta_i}{\gamma} \|z_i - y_i\|_r^2$ می باشد.

$$F^*(\xi_i) = \text{Re}\langle y_i, \xi_i \rangle + \frac{1}{2\delta_i} \|\xi_i\|_r^2 \quad (14)$$

و

$$H^*(v_i) = \text{Re}\langle y_i, v_i \rangle + \frac{1}{2\lambda_i} \|v_i\|_r^2 \quad (15)$$

همان طور که ملاحظه می شود، هر دو تابع F^* و H^* قویاً محذب بوده و پارامتر تحدیشان به ترتیب عبارت است از $\alpha_i \leq 1/\delta_i$ و $\beta_i \leq 1/\lambda_i$. حال به محاسبه نگاشت های پروگزیمال لازم در (۱۲) می پردازیم. نگاشت پروگزیمال G عبارت خواهد بود از $P_G(\tau_i^n; z) = S_{\tau_i^n}(z)$ با درایه ℓ ام $(P_G(\tau_i^n; z))_\ell = (S_{\tau_i^n}(z))_\ell = S_{\tau_i^n}(z_\ell)$ عملگر آستانه نرم مختلط^۱ بوده و به صورت زیر تعریف می شود

$$S_{\tau_i^n}(z_\ell) = \begin{cases} \text{sgn}(z_\ell)(|z_\ell| - \tau_i^n) & \text{if } |z_\ell| \geq \tau_i^n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

که در آن $\text{sgn}(z_\ell) = z_\ell/|z_\ell|$ است. نگاشت پروگزیمال توابع F^* و H^* نیز به ترتیب عبارت هستند از $P_{F^*}(\eta_i^n; \xi) = \frac{\delta_i}{\eta_i^n + \delta_i} (\xi - \eta_i^n y_i)$ و

$$P_{H^*}(\gamma_i^n; v) = \frac{\lambda_i}{\gamma_i^n + \lambda_i} (v - \gamma_i^n y_i) \quad \text{و}$$

با توجه به نگاشت پروگزیمال G ، عبارت متناظر با به هنگام رسانی x_i^n در (۱۲) به صورت $x_i^{n+1} = S_{\tau_i^n}(x_i^n - \tau_i^n (A_i^* \xi_i^{n+1} + A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1}))$ خواهد بود. با توجه به وجود A_{i+1}^* در این عبارت، اینکه گره i ام در هر تکرار به ماتریس اندازه گیری گره همسایه خود نیاز دارد، شاید به عنوان یک مشکل تلقی شود، اما با تعریف متغیر جدید $\omega_i^n = A_i^* v_i^n$ این مبادله ماتریس مطابق الگوریتم زیر به تبادل یک بردار کاهش می یابد

$$\begin{aligned} \eta_i^n, \gamma_i^n, \tau_i^n > 0, \mu_i \in (0, 1), \bar{x}_i = x_i, \alpha_i \leq \frac{1}{\delta_i}, \beta_i \leq \frac{1}{\lambda_i} \\ \tau_i \eta_i \|A_i\|_{r \rightarrow r} \leq \frac{1}{\gamma}, \tau_i \gamma_{i+1} \|A_{i+1}\|_{r \rightarrow r} \leq \frac{1}{\gamma} \\ \xi_i^{n+1} = \frac{\delta_i}{\eta_i^n + \delta_i} (\xi_i^n + \eta_i^n (A_i \bar{x}_i^n - y_i)) \\ \omega_i^{n+1} = \frac{\lambda_i}{\gamma_i^n + \lambda_i} (\omega_i^n + \gamma_i^n A_i^* (A_i \bar{x}_{i-1}^n - y_i)) \\ x_i^{n+1} = S_{\tau_i^n}(x_i^n - \tau_i^n (A_i^* \xi_i^{n+1} + \omega_{i+1}^{n+1})) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mu_{\gamma, i}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_i \eta_i^n}}, \mu_{\tau, i}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_i \gamma_i^n}},$$

$$\mu_i^{n+1} = \max\{\mu_{\gamma, i}^{n+1}, \mu_{\tau, i}^{n+1}\}$$

$$\eta_i^{n+1} = \mu_{\gamma, i}^{n+1} \eta_i^n, \gamma_i^{n+1} = \mu_{\tau, i}^{n+1} \gamma_i^n,$$

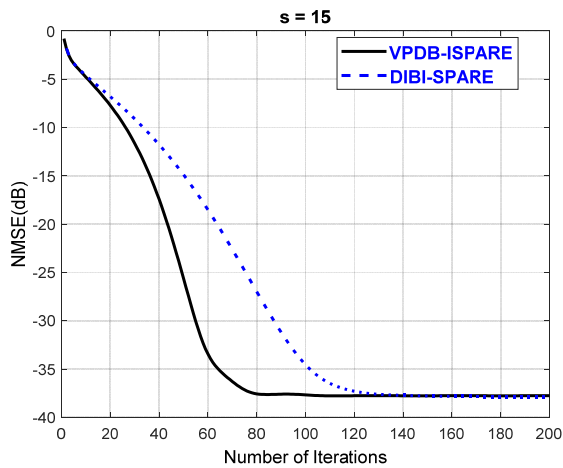
$$\tau_i^{n+1} = \frac{\tau_i^n}{\mu_i^{n+1}}, \bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1} + \mu_i^{n+1} (x_i^{n+1} - x_i^n)$$

در ادامه به شبیه سازی این الگوریتم پرداخته شده و آن را با شیوه پارامتر ثابت ارائه شده در [۳] مقایسه می کنیم. در شبیه سازیها این الگوریتم را

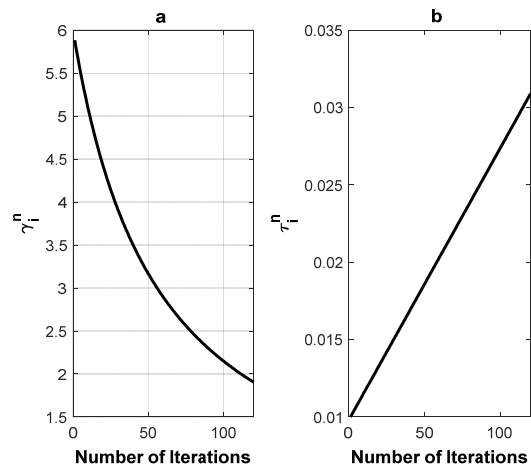
2. Variable Parameter Distributed Bidirectional Incremental Sparse Reconstruction

3. Distributed Bidirectional Incremental Sparse Reconstruction

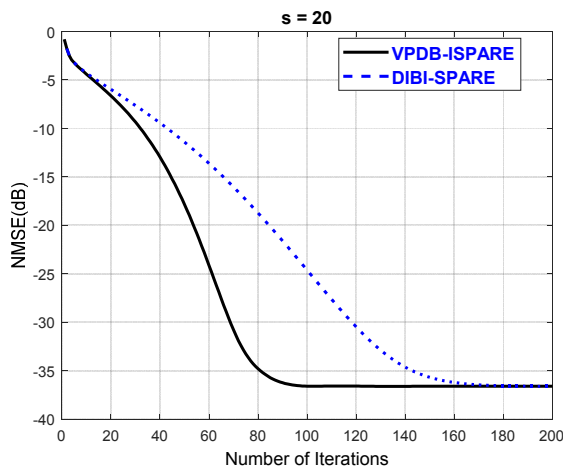
1. Complex Soft Thresholding



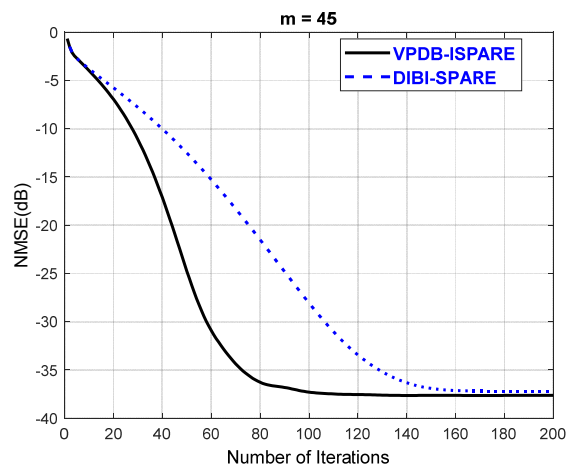
شکل ۵: NMSE بر حسب تکرار برای $s = 15$.



شکل ۶: منحنی τ_i'' (b) و γ_i'' (a) بر حسب تکرار و برای گره #۱.



شکل ۷: NMSE بر حسب تکرار برای $s = 20$.



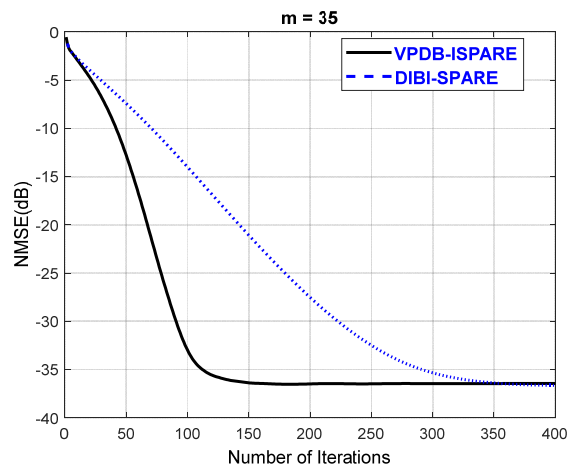
شکل ۸: NMSE بر حسب تکرار برای $m = 45$.

الگوریتم پیشنهادی در مقادیر خیلی کوچکتر m نیز همگرا شده و ثانیاً اگرچه با کاهش m سرعت همگرایی کاهش پیدا کرده است، اما تأثیر این کاهش سرعت بر الگوریتم پیشنهادی به مراتب کمتر از الگوریتم DIBI-SPARE بوده است.

در شبیه‌سازی‌های قبل، پارامتر تنگی برابر $s = 10$ در نظر گرفته شده است. برای بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی بر حسب پارامترهای تنگی مختلف، منحنی NMSE بر حسب تکرار برای $s = 15$ و $s = 20$ به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ ترسیم گردیده که در آنها $m = 60$ بوده و شکل‌ها مشاهده می‌شود، حتی در شرایط سختگیرانه‌تر برای پارامتر تنگی، الگوریتم پیشنهادی عملکرد به‌مراتب بهتری از خود به نمایش می‌گذارد.

۵- نتیجه

در این مقاله، یک الگوریتم توزیع شده اولیه- دوگانه با پارامترهای متغیر و در یک ساختار افزایشی دوجبهته که در آن هر گره می‌تواند در یک ساختار چرخه‌ای از گره ماقبل خود دیتا دریافت کرده و نیز به آن دیتا ارسال کند، ارائه شده است. انتخاب پارامترها به‌صورت متغیر با زمان و در یک ساختار نظام‌مند این امکان را در الگوریتم پیشنهادی فراهم آورد تا با سرعت بالاتری به حالت دائم خود همگرا شود. ضابطه‌های استخراج شده برای پارامترهای الگوریتم پیشنهادی در شرایط سخت‌گیرانه‌تری نظیر پارامتر تنگی بزرگ‌تر یا تعداد اندازه‌گیری پایین‌تر نیز عملکرد همگرایی سریع‌تری را نتیجه می‌دهند.



شکل ۹: NMSE بر حسب تکرار برای $m = 35$.

نمایش داده نشده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود γ_i'' روند نزولی و τ_i'' روند صعودی داشته و این شیوه تغییرات به خوبی توانسته که مطابق شکل ۱ موجب تسریع سرعت همگرایی شود.

شکل‌های ۳ و ۴ منحنی NMSE بر حسب تکرار را به ترتیب برای $m = 45$ و $m = 35$ نشان می‌دهند که در آن $s = 10$ بوده و $\alpha_i = 0.8/\delta_i$ و $\beta_i = 0.8/\lambda_i$ قرار داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوریتم VPDB-ISPARE برای $m = 45$ حدود ۶۰ تکرار و برای $m = 35$ حدود ۱۹۰ تکرار سریع‌تر از DIBI-SPARE همگرا می‌شود. به عبارتی از شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان نتیجه گرفت که اولاً

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^n - x_i\|_v}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^n - \xi_i\|_v}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^n - v_i\|_v}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J [G(x_i^{n+1}) - F^*(\xi_i) - H^*(v_i) + \text{Re}\langle A_i^* \xi_i, x_i^{n+1} \rangle + \text{Re}\langle A_i^* v_i, x_i^{n+1} \rangle] -$$

$$\sum_{i=1}^J [G(x_i) - F^*(\xi_i^{n+1}) - H^*(v_i^{n+1}) + \text{Re}\langle A_i^* \xi_i^{n+1}, x_i \rangle + \text{Re}\langle A_i^* v_i^{n+1}, x_i \rangle] + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n+1} - x_i\|_v}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \left(\frac{\alpha_i}{\tau} + \frac{1}{\eta_i^n}\right) \|\xi_i - \xi_i^{n+1}\|_v + \quad (۵-پ)$$

$$\sum_{i=1}^J \left(\frac{\beta_i}{\tau} + \frac{1}{\gamma_i^n}\right) \|v_i - v_i^{n+1}\|_v + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^n - x_i^{n+1}\|_v}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^n - \xi_i^{n+1}\|_v}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^n - v_i^{n+1}\|_v}{\gamma_i^n} + \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^* (\xi_i - \xi_i^{n+1}), (\bar{x}_i^n - x_i^{n+1}) \rangle -$$

$$\sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1}, x_i - x_i^{n+1} \rangle + \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^* v_i, \bar{x}_{i-1}^n - x_i^{n+1} \rangle + \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^* v_i^{n+1}, x_{i-1} - \bar{x}_{i-1}^n \rangle$$

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^n - x_i^\# \|_v}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^n - \xi_i^\# \|_v}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^n - v_i^\# \|_v}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n+1} - x_i^\# \|_v}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \left(\frac{\alpha_i}{\tau} + \frac{1}{\eta_i^n}\right) \|\xi_i^{n+1} - \xi_i^\# \|_v +$$

$$\sum_{i=1}^J \left(\frac{\beta_i}{\tau} + \frac{1}{\gamma_i^n}\right) \|v_i^{n+1} - v_i^\# \|_v + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n+1} - x_i^\# \|_v}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^{n+1} - \xi_i^\# \|_v}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^{n+1} - v_i^\# \|_v}{\gamma_i^n} + \quad (۶-پ)$$

$$\sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^* (\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}), (x_i^n - x_i^{n+1}) \rangle + \sum_{i=1}^J \mu_i^n \text{Re}\langle A_i^* (\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}), (x_i^n - x_i^{n-1}) \rangle - \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1}, x_i^\# - x_i^{n+1} \rangle +$$

$$\sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^* v_i^\#, (x_{i-1}^n - x_i^{n+1}) \rangle + \sum_{i=1}^J \mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^* v_i^\#, x_{i-1}^n - x_i^{n-1} \rangle + \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^* v_i^{n+1}, x_{i-1}^\# - x_i^{n-1} \rangle - \sum_{i=1}^J \mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^* v_i^{n+1}, x_{i-1}^n - x_i^{n-1} \rangle$$

$$G(x_i) + F^*(\xi_i) + H^*(v_i) \geq G(x_i^{n+1}) + F^*(\xi_i^{n+1}) +$$

$$H^*(v_i^{n+1}) - \frac{1}{\tau_i^n} \text{Re}\langle x_i^n - x_i^{n+1}, x_i^{n+1} - x_i \rangle -$$

$$\frac{1}{\eta_i^n} \text{Re}\langle \xi_i^n - \xi_i^{n+1}, \xi_i^{n+1} - \xi_i \rangle -$$

$$\frac{1}{\gamma_i^n} \text{Re}\langle v_i^n - v_i^{n+1}, v_i^{n+1} - v_i \rangle + \frac{\alpha_i}{\tau} \|\xi_i - \xi_i^{n+1}\|_v + \quad (۳-پ)$$

$$\frac{\beta_i}{\tau} \|v_i - v_i^{n+1}\|_v - \text{Re}\langle A_i^* \xi_i^{n+1}, x_i - x_i^{n+1} \rangle -$$

$$\text{Re}\langle A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1}, x_i - x_i^{n+1} \rangle + \text{Re}\langle A_i \bar{x}_i^n, \xi_i - \xi_i^{n+1} \rangle +$$

$$\text{Re}\langle A_i \bar{x}_{i-1}^n, v_i - v_i^{n+1} \rangle$$

با توجه به $-\text{Re}\langle x, y \rangle = \frac{\|x\|_v + \|y\|_v - \|x+y\|_v}{2}$ داریم

$$\frac{\|x_i^n - x_i\|_v}{\tau_i^n} + \frac{\|\xi_i^n - \xi_i\|_v}{\eta_i^n} + \frac{\|v_i^n - v_i\|_v}{\gamma_i^n} \geq G(x_i^{n+1}) -$$

$$F^*(\xi_i) - H^*(v_i) - G(x_i) + F^*(\xi_i^{n+1}) + H^*(v_i^{n+1}) +$$

$$\frac{\|x_i^n - x_i^{n+1}\|_v}{\tau_i^n} + \frac{\|x_i^{n+1} - x_i\|_v}{\tau_i^n} + \frac{\|\xi_i^n - \xi_i^{n+1}\|_v}{\eta_i^n} +$$

$$\left(\frac{\alpha_i}{\tau} + \frac{1}{\eta_i^n}\right) \|\xi_i - \xi_i^{n+1}\|_v + \frac{\|v_i^n - v_i^{n+1}\|_v}{\gamma_i^n} + \quad (۴-پ)$$

$$\left(\frac{\beta_i}{\tau} + \frac{1}{\gamma_i^n}\right) \|v_i - v_i^{n+1}\|_v - \text{Re}\langle A_i^* \xi_i^{n+1}, x_i - x_i^{n+1} \rangle -$$

$$\text{Re}\langle A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1}, x_i - x_i^{n+1} \rangle + \text{Re}\langle A_i \bar{x}_i^n, \xi_i - \xi_i^{n+1} \rangle +$$

$$\text{Re}\langle A_i \bar{x}_{i-1}^n, v_i - v_i^{n+1} \rangle$$

با جمع طرفین رابطه فوق به ازای $i = 1, 2, \dots, J$ را داریم. در (۵-پ) عبارت $\bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1} + \mu_i^{n+1}(x_i^{n+1} - x_i^n)$ را جایگذاری کرده و در $x_i^\#, \xi_i^\#, v_i^\#, i = 1, 2, \dots, J$ را نقطه بهینه

پیوست

پیوست الف - اثبات لم ۱

با در نظر گرفتن پارامترهای متغیر با زمان $\tau_i^n, \gamma_i^n, \eta_i^n$ و μ_i^n تکرارهای الگوریتم (۶) را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{\xi_i^n - \xi_i^{n+1}}{\eta_i^n} + A_i \bar{x}_i^n \in \partial F^*(\xi_i^{n+1})$$

$$\frac{v_i^n - v_i^{n+1}}{\gamma_i^n} + A_i \bar{x}_{i-1}^n \in \partial H^*(v_i^{n+1}) \quad (۱-پ)$$

$$\frac{x_i^n - x_i^{n+1}}{\tau_i^n} - A_i^* \xi_i^{n+1} - A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1} \in \partial G(x_i^{n+1})$$

که در آن ∂G به زیردیفرانسیل^۱ تابع G اشاره دارد. در (۱-پ) از این واقعیت استفاده شده که برای تابع محدب G داریم $x = P_G(z)$ اگر و تنها اگر $z \in x + \partial G(x)$. با بهره گیری از مفهوم زیردیفرانسیل و با این فرض که F^* و H^* هر دو قویاً محدب هستند از (۱-پ) داریم

$$G(x_i) \geq G(x_i^{n+1}) +$$

$$\text{Re}\langle \frac{x_i^n - x_i^{n+1}}{\tau_i^n} - A_i^* \xi_i^{n+1} - A_{i+1}^* v_{i+1}^{n+1}, x_i - x_i^{n+1} \rangle$$

$$F^*(\xi_i) \geq F^*(\xi_i^{n+1}) +$$

$$\text{Re}\langle \frac{\xi_i^n - \xi_i^{n+1}}{\eta_i^n} + A_i \bar{x}_i^n, \xi_i - \xi_i^{n+1} \rangle + \frac{\alpha_i}{\tau} \|\xi_i - \xi_i^{n+1}\|_v \quad (۲-پ)$$

$$H^*(v_i) \geq H^*(v_i^{n+1}) +$$

$$\text{Re}\langle \frac{v_i^n - v_i^{n+1}}{\gamma_i^n} + A_i \bar{x}_{i-1}^n, v_i - v_i^{n+1} \rangle + \frac{\beta_i}{\tau} \|v_i - v_i^{n+1}\|_v$$

که در آن $\alpha_i, \beta_i > 0$ پارامترهای تحدب قوی هستند. با جمع طرفین سه نامساوی در (۲-پ) خواهیم داشت

نظر می گیریم تا (پ-۶) نتیجه گردد. در از این واقعیت استفاده شده که در نقطه

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^n\|_\tau^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^n\|_\tau^2}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^{n+1}\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \left(\frac{\alpha_i}{\tau} + \frac{1}{\eta_i^n}\right) \|\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}\|_\tau^2 + \sum_{i=1}^J \left(\frac{\beta_i}{\tau} + \frac{1}{\gamma_i^n}\right) \|v_i^\# - v_i^{n+1}\|_\tau^2 + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n+1} - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^{n+1} - \xi_i^n\|_\tau^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^{n+1} - v_i^n\|_\tau^2}{\gamma_i^n} + \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}), (x_i^n - x_i^{n+1}) \rangle - \sum_{i=1}^J \mu_i^n \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}), (x_i^{n-1} - x_i^n) \rangle + \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^{n+1}), (x_{i-1}^n - x_{i-1}^{n+1}) \rangle - \sum_{i=1}^J \mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^{n+1}), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle \quad (۷-پ)$$

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^n\|_\tau^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^n\|_\tau^2}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^{n+1}\|_\tau^2}{\tau_i^{n+1}} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}\|_\tau^2}{\eta_i^{n+1}} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^{n+1}\|_\tau^2}{\gamma_i^{n+1}} + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n+1} - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^{n+1}} - \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^{n-1} - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}), (x_i^n - x_i^{n+1}) \rangle - \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^n), (x_i^{n-1} - x_i^n) \rangle + \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^{n+1}), (x_{i-1}^n - x_{i-1}^{n+1}) \rangle - \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^n), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle \quad (۱۲-پ)$$

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^n\|_\tau^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^n\|_\tau^2}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^M\|_\tau^2}{\tau_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^M\|_\tau^2}{\eta_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^M\|_\tau^2}{\gamma_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^M - x_i^{M-1}\|_\tau^2}{\tau_i^M} + \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^M), (x_i^{M-1} - x_i^M) \rangle + \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^M), (x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M) \rangle \quad (۱۳-پ)$$

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^n\|_\tau^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^n\|_\tau^2}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^M\|_\tau^2}{\tau_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^M\|_\tau^2}{\eta_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^M\|_\tau^2}{\gamma_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^M - x_i^{M-1}\|_\tau^2}{\tau_i^M} + \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^M), (x_i^{M-1} - x_i^M) \rangle + \tau \sum_{i=1}^J \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^M), (x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M) \rangle \quad (۱۴-پ)$$

$$\sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^n\|_\tau^2}{\tau_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^n\|_\tau^2}{\eta_i^n} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^n\|_\tau^2}{\gamma_i^n} \geq \sum_{i=1}^J \frac{\|x_i^\# - x_i^M\|_\tau^2}{\tau_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^M\|_\tau^2}{\eta_i^M} + \sum_{i=1}^J \frac{\|v_i^\# - v_i^M\|_\tau^2}{\gamma_i^M} + \sum_{i=1}^J (1 - \tau \tau_i^M \eta_i^M \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2) \frac{\|\xi_i^\# - \xi_i^M\|_\tau^2}{\eta_i^M} + \sum_{i=1}^J (1 - \tau \tau_{i-1}^M \gamma_i^M \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2) \frac{\|v_i^\# - v_i^M\|_\tau^2}{\gamma_i^M} \quad (۱۵-پ)$$

و $\mu_i^n \in (0, 1)$ از طرفی از قیدهای (۱۱) و (۱۰) همواره خواهیم داشت

$$\tau_i^n \eta_i^n \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \leq \frac{1}{\tau} \quad (۱۰-پ)$$

$$\tau_i^n \gamma_{i+1}^n \|A_{i+1}\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \leq \frac{1}{\tau}$$

و از این رابطه می توان نتیجه گرفت که

$$(\mu_i^n)^\tau \tau_i^n (\|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \eta_i^n + \|A_{i+1}\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \gamma_{i+1}^n) \leq 1 \quad (۱۱-پ)$$

لذا با توجه به لم ۱، (۹) را می توان به صورت (پ-۱۲) نوشت. طرفین

(پ-۱۲) را از $n = 0$ تا $n = M - 1$ جمع می بنسیم. با فرض

$x_i^{-1} = x_i$ (پ-۱۳) را خواهیم داشت و از طرفی با توجه به

$$\tau \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^M), (x_i^{M-1} - x_i^M) \rangle \geq -\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|\xi_i^\# - \xi_i^M\|_\tau \|x_i^{M-1} - x_i^M\|_\tau \geq -\tau \tau_i^M \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|\xi_i^\# - \xi_i^M\|_\tau - \frac{\|x_i^M - x_i^{M-1}\|_\tau^2}{\tau \tau_i^M} \quad (۱۴-پ)$$

$$\tau \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^M), (x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M) \rangle \geq -\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|v_i^\# - v_i^M\|_\tau \|x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M\|_\tau \geq -\tau \tau_{i-1}^M \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|v_i^\# - v_i^M\|_\tau - \frac{\|x_{i-1}^M - x_{i-1}^{M-1}\|_\tau^2}{\tau \tau_{i-1}^M} \quad (۱۵-پ)$$

و

$$\tau \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^M), (x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M) \rangle \geq -\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|v_i^\# - v_i^M\|_\tau \|x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M\|_\tau \geq -\tau \tau_{i-1}^M \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|v_i^\# - v_i^M\|_\tau - \frac{\|x_{i-1}^M - x_{i-1}^{M-1}\|_\tau^2}{\tau \tau_{i-1}^M} \quad (۱۵-پ)$$

$$\tau \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^M), (x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M) \rangle \geq -\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|v_i^\# - v_i^M\|_\tau \|x_{i-1}^{M-1} - x_{i-1}^M\|_\tau \geq -\tau \tau_{i-1}^M \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau} \|v_i^\# - v_i^M\|_\tau - \frac{\|x_{i-1}^M - x_{i-1}^{M-1}\|_\tau^2}{\tau \tau_{i-1}^M}$$

تفاضل دو عبارت اول سمت راست نامساوی (پ-۵) با توجه به (۴) نامنفی

خواهد بود. رابطه (پ-۶) را می توان به صورت (پ-۷) بازنویسی کرد که

در آن از این واقعیت استفاده شده که $x^n = x_j^n$ ، $A_i = A_{j+1}$ ، و $v_i^n = v_{j+1}^n$.

با توجه به $\| \text{Re}\langle Ax, y \rangle \| \leq \|A\|_{\tau \rightarrow \tau} \|x\|_\tau \|y\|_\tau$ و $\tau ab \leq qa^\tau + (1/q)b^\tau$

برای هر $a, b, q > 0$ داریم

$$\mu_i^n \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^{n+1}), (x_i^{n-1} - x_i^n) \rangle \leq \frac{\|\xi_i^{n+1} - \xi_i^n\|_\tau^2}{\tau \eta_i^n} + \mu_i^n \text{Re}\langle A_i^*(\xi_i^\# - \xi_i^n), (x_i^{n-1} - x_i^n) \rangle + \frac{(\mu_i^n)^\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \eta_i^n \|x_i^{n-1} - x_i^n\|_\tau^2}{\tau} \quad (۸-پ)$$

$$\mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^{n+1}), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle \leq \frac{\|v_i^{n+1} - v_i^n\|_\tau^2}{\tau \gamma_i^n} + \mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^n), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle + \frac{(\mu_{i-1}^n)^\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \gamma_i^n \|x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n\|_\tau^2}{\tau} \quad (۹-پ)$$

به طور مشابه داریم

$$\mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^{n+1}), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle \leq \frac{\|v_i^{n+1} - v_i^n\|_\tau^2}{\tau \gamma_i^n} + \mu_{i-1}^n \text{Re}\langle A_i^*(v_i^\# - v_i^n), (x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n) \rangle + \frac{(\mu_{i-1}^n)^\tau \|A_i\|_{\tau \rightarrow \tau}^2 \gamma_i^n \|x_{i-1}^{n-1} - x_{i-1}^n\|_\tau^2}{\tau}$$

با جایگذاری (پ-۸) و (پ-۹) در (پ-۷) و با اندکی محاسبات، (۹)

نتیجه خواهد شد.

پیوست ب- اثبات قضیه ۱

از (۱۰) داریم: $\frac{\tau_i^{n+1}}{\tau_i^n} > 1$ ، $(1 + \beta_i \gamma_i^n) \frac{\gamma_i^{n+1}}{\gamma_i^n} > 1$ ، $(1 + \alpha_i \eta_i^n) \frac{\eta_i^{n+1}}{\eta_i^n} > 1$

- algorithm for wireless sensor networks," *International J. of Communication Systems*, vol. 35, no. 9, Article ID: e5126, Jun. 2022.
- [11] O. Karpis, et al., "Compressed sensing-a way to spare energy in WSN for UAV," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 4, pp. 170-176, 2022.
- [12] A. Salim, W. Osamy, A. M. Khedr, A. Aziz, and M. Abdel-Mageed, "A secure data gathering scheme based on properties of primes and compressive sensing for IoT-based WSNs," *IEEE Sensors J.*, vol. 21, no. 4, pp. 5553-5571, 15 Feb. 2020.
- [13] Y. Xu, G. Sun, T. Geng, and B. Zheng, "Compressive sparse data gathering with low-rank and total variation in wireless sensor networks," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 155242-155250, 2019.
- [14] C. Wang, X. Shen, H. Wang, and H. Mei, "Energy-efficient collection scheme based on compressive sensing in underwater wireless sensor networks for environment monitoring over fading channels," *Digital Signal Processing*, vol. 127, Article ID: 103530, Jul. 2022.
- [15] M. Al Mazaideh and J. Leventovszky, "A multi-hop routing algorithm for WSNs based on compressive sensing and multiple objective genetic algorithm," *J. of Communications and Networks*, vol. 23, no. 2, pp. 138-147, Apr. 2021.
- [16] J. Chen, et al., "Factor graphs for support identification in compressive sensing aided wireless sensor networks," *IEEE Sensors J.*, vol. 21, no. 23, pp. 27195-27207, 1 Dec. 2021.
- [17] R. Torkamani, H. Zayyani, and R. A. Sadeghzadeh, "Model-based decentralized Bayesian algorithm for distributed compressed sensing," *Signal Processing: Image Communication*, vol. 95, Article ID: 116212, Jul. 2021.
- [18] F. Amini, Y. Hedayati, and H. Zanddzari, "Exploiting the inter-correlation of structural vibration signals for data loss recovery: a distributed compressive sensing-based approach," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 152, Article ID: 107473, May 2021.
- [19] G. Azarnia, "Distribution agnostic Bayesian compressive sensing with incremental support estimation," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 33, no. 2, pp. 327-340, Jun. 2022.
- [20] A. Chambolle and T. Pock, "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging," *J. of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 40, no. 1, pp. 120-145, May 2011.

قنبر آذرنیا تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق مخابرات سیستم در دانشگاه تبریز به پایان رساند؛ سپس به عنوان دانش آموخته برتر تحصیلات خود را در مقطع دکترای تخصصی رشته مهندسی برق مخابرات سیستم ادامه داد و در سال ۱۳۹۶ موفق به کسب درجه دکترای تخصصی از دانشگاه تبریز شد. ایشان هم‌اکنون استادیار دانشکده فنی و مهندسی خوی دانشگاه صنعتی ارومیه هستند. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان عبارتند از: پردازش توزیع‌شده در شبکه‌های حسگری بیسیم، تخمین کانال، پردازش سیگنال‌های پزشکی، حسگری فشرده، فیلتر وقتی و تبدیل موجک.

می‌توان (پ-۱۳) را به صورت (پ-۱۶) نوشت. با توجه به (پ-۱۰) تمام عبارتهای سمت راست نامساوی (پ-۱۶) مثبت می‌باشد و لذا با انتخاب پارامترهای متغیر با زمان مطابق (۱۰) و با اعمال قید (۱۱) تکرارهای $x_i^n, c_i^n, U_i^n, i=1,2,\dots,J$ کراندار می‌مانند.

مراجع

- [۱] ح. نظری، م. رئیس‌دانایی و م. سپه‌وند، "مکان‌یابی بر اساس تفاضل توان سیگنال دریافتی با به‌کارگیری بهینه‌سازی محدب در شبکه حسگر بی‌سیم،" *نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران، ب- مهندسی کامپیوتر، سال ۱۷، شماره ۴، صص. ۳۱۰-۳۰۶، زمستان ۱۳۹۸.*
- [۲] ف. پدیداران مقدم و ح. مقصودی، "مسیریابی بهبودیافته برای توازن بار در شبکه حسگر بی‌سیم در بستر اینترنت اشیا بر پایه الگوریتم کلونی مورچگان چندگانه،" *فصلنامه فناوری اطلاعات و ارتباطات ایران، سال ۱۴، شماره ۵۱/۵۲، صص. ۲۵۵-۲۲۰، تابستان ۱۴۰۱.*
- [۳] ق. آذرنیا، م. ع. طینتی و ت. یوسفی رضایی، "الگوریتم توزیع‌شده و مشارکتی به‌منظور بازسازی سیگنال‌های تنک در شبکه‌های حسگری بی‌سیم با توپولوژی افزایشی دووجهی،" *فصلنامه علمی پردازش علائم و داده‌ها، جلد ۱۸، شماره ۳، صص. ۶۵-۷۶، زمستان ۱۴۰۰.*
- [۴] ق. آذرنیا و ع. ع. شریفی، "الگوریتم طول متغیر کسری نفوذی با قابلیت پیشبرد مشارکت مبتنی بر گرادیان برای افزایش کارایی شبکه‌های تطبیقی با لینک‌های نوبزی،" *مجله علمی پژوهشی رایانش نرم و فناوری اطلاعات، جلد ۱۰، شماره ۴، صص. ۱۴-۱، زمستان ۱۴۰۰.*
- [5] S. El Khediri, "Wireless sensor networks: a survey, categorization, main issues, and future orientations for clustering protocols," *Computing*, vol. 104, no. 8, pp. 1775-1837, Aug. 2022.
- [6] G. Azarnia and A. A. Sharifi, "Steady-state analysis of distributed incremental variable fractional tap-length LMS adaptive networks," *Wireless Networks*, vol. 27, no. 7, pp. 4603-4614, 2021.
- [7] G. Azarnia, "Diffusion fractional tap-length algorithm with adaptive error width and step-size," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 321-345, Jan. 2022.
- [8] G. Azarnia, M. A. Tinati, A. A. Sharifi, and H. Shiri, "Incremental and diffusion compressive sensing strategies over distributed networks," *Digital Signal Processing*, vol. 101, Article ID: 102732, Jun. 2020.
- [9] C. Li, G. Li, and P. K. Varshney, "Distributed detection of sparse signals with censoring sensors in clustered sensor networks," *Information Fusion*, vol. 83/84, pp. 1-18, Jul. 2022.
- [10] G. Azarnia and A. A. Sharifi, "Fully cooperative and distributed focal underdetermined system solver compressive sensing recovery