

طراحی گیرنده بهینه و تخصیص توان در رادارهای آرایه‌ای فازی چندرودی - چندخروجی تنوع فرکانسی در محیط با کلاتر ناهمگن

حمیدرضا فتوحی فیروزآباد، سید مهدی حسینی اندارگلی، حسین قانعی یخدان و جمشید ابویی

سیگنال‌های بازگشتی از هدف استفاده می‌کنند، حجم وسیعی از تحقیقات در حوزه رادار را به خود اختصاص داده‌اند. رادارهای آرایه فازی به دلیل امکان اسکن الکترونیکی فضا که فراهم می‌کنند بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. این امکان باعث می‌شود محدودیت‌های زمانی که برای چرخش پرتو در رادارهای تک‌آنتنی داشتند از بین برود و قادر باشند در چندین میکروثانیه، الگوی پرتو تشعشی رادار را عوض کرد. همچنین قادر خواهند بود در یک زمان مشخص، چندین بیم را تحت پوشش قرار دهند. در این رادارها می‌توان به حداکثر بهره مجموع همدوس سیگنال‌ها دست یافت. در عین حال این رادارها از مشکلاتی نیز رنج می‌برند؛ به دلیل شرایط انتشار، ممکن است برخی از سیگنال‌های راداری به‌شدت مورد تضعیف قرار گیرند که باعث افت عملکرد آشکارسازی خواهد شد [۱]. با شروع قرن ۲۱، ارتقای سیستم‌های راداری وارد فاز جدیدی گردید و بحث‌های تحقیقاتی رادارهای چندرودی - چندخروجی با شتاب خوبی آغاز شد. ایده این رادارها به این صورت است که از تعدادی گیرنده و فرستنده استفاده می‌شود که هر فرستنده اقدام به ارسال یک سیگنال مشخص می‌کند که این سیگنال‌ها معمولاً عمود بر یکدیگر هستند. این سیگنال‌ها در گیرنده دریافت می‌شوند و با پردازش‌هایی که در این رادارها انجام می‌گردد قادر خواهند بود به حد تفکیک بهتر زاویه‌ای و همچنین تعداد اهداف بیشتر برای آشکارسازی دست یافت [۲] و [۳].

رادار چندرودی - چندخروجی دارای چند فرستنده و چند گیرنده برای ارسال و دریافت سیگنال است. این آنتن‌ها می‌توانند به هم نزدیک باشند و یا در فواصل دور از هم قرار گیرند. المان‌های فرستنده در رادار چندرودی - چندخروجی می‌توانند شکل موج‌های متفاوتی را برخلاف رادار آرایه فازی ارسال نمایند. این شکل موج‌ها متعامد بوده و بین آنها درجه همبستگی کمی وجود دارد. رادارهای چندرودی - چندخروجی در حالت کلی به دو صورت قابل پیاده‌سازی هستند؛ در حالت اول، رادار از تعدادی فرستنده که به اندازه کافی دور از یکدیگر هستند، استفاده می‌کند. علاوه بر این، گیرنده‌های رادار نیز وضعیت مشابهی خواهند داشت که به این نوع رادارها، رادارهای چندرودی - چندخروجی توزیع‌یافته می‌گویند. مزایای این نوع پیاده‌سازی آن است که با توجه به اینکه فرستنده‌های رادار از یکدیگر فاصله دارند هنگامی که به سمت یک هدف یک سیگنال مشخص و یکسان تشعشع می‌کنند، در صورتی که یکی از سیگنال‌ها دچار محوشدگی (فیدینگ) مخرب شود، احتمال اینکه سایر سیگنال‌ها نیز به چنین وضعیتی دچار شوند بسیار ضعیف است. چنین حالتی در حقیقت از چندگانگی فضایی استفاده می‌کند. با توجه به وجود چندین گیرنده در رادار که در فواصل دور قرار دارند واضح است که چندگانگی از مرتبه بالایی برخوردار خواهد بود که باعث می‌شود عدم آشکارسازی به واسطه محوشدگی مخرب وجود نداشته باشد و یا اینکه به حداقل میزان ممکن

چکیده: در سال‌های اخیر، رادارهای آرایه فازی چندرودی - چندخروجی به‌شدت مورد توجه محققان قرار گرفته است. در واقع در این رادارها می‌توان مزایای رادارهای آرایه فازی و رادارهای چندرودی - چندخروجی را با هم ترکیب کرد. در اینجا فرض می‌شود که زیرآرایه‌ها دارای بهره چندگانگی فرکانسی بوده و از بهره همدوسی کامل برخوردارند. ابتدا در این مقاله به موضوع طراحی آشکارساز بهینه برای رادارهای آرایه فازی چندرودی - چندخروجی بر پایه فرض شناخت ضریب انعکاس هدف در حضور کلاتر ناهمگن پرداخته می‌شود. در ادامه بر پایه آشکارسازهای استخراج‌شده، احتمال آشکارسازی و احتمال هشدار کاذب محاسبه شده و به شکل فرمول بسته بر حسب پارامترهای رادار و محیط ارائه می‌گردد. سپس مسأله تخصیص توان به سیگنال‌های متعامد برای بیشینه کردن احتمال آشکارسازی فرمول‌بندی می‌شود. نهایتاً موضوع بهره چندگانگی فرکانسی مورد تجزیه و تحلیل ریاضی قرار گرفته و کرانی برای بهره چندگانگی ارائه می‌گردد. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهند که آشکارسازهای بهینه استخراج‌شده، یک فیلتر توأم فضایی - زمانی خواهد بود که به‌طور مؤثری باعث تضعیف کلاتر در رادارهای آرایه فازی چندرودی - چندخروجی می‌گردد. همچنین نشان می‌دهند که الگوریتم‌های تخصیص توان باعث بهبود عملکرد آشکارسازی اهداف در مقایسه با الگوریتم‌های معیار می‌گردد.

کلیدواژه: رادارهای چندرودی - چندخروجی آرایه فازی، آشکارساز بهینه، کلاتر ناهمگن، تخصیص توان.

۱- مقدمه

فناوری رادار در طول هشت دهه‌ای که از پیدایش آن می‌گذرد پیوسته در حال توسعه بوده و در رادارهای آرایه‌ای از چندین آنتن برای ارسال و دریافت سیگنال‌ها استفاده می‌شود. در نوع قدیمی رادار چندآنتنه که به رادار آرایه فازی معروف هستند، از یک شکل موج ارسالی برای بهره‌گیری از پردازش همدوس سیگنال‌ها در آرایه‌های فرستنده و گیرنده استفاده می‌گردد. در چند سال اخیر، رادارهای چندرودی - چندخروجی که از چند آنتن برای ارسال شکل موج‌های متعامد و چند آنتن برای دریافت

این مقاله در تاریخ ۲۱ تیر ماه ۱۴۰۰ دریافت و در تاریخ ۱۷ مهر ماه ۱۴۰۱ بازنگری شد.

حمیدرضا فتوحی فیروزآباد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، یزد، ایران،
(email: hrfotoohi@yahoo.com).

سید مهدی حسینی اندارگلی (نویسنده مسئول)، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران،
(email: smh_andargoli@nit.ac.ir).

حسین قانعی یخدان، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، یزد، ایران،
(email: hghaneiy@yazd.ac.ir).

جمشید ابویی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، یزد، ایران،
(email: abouei@yazd.ac.ir).

در دو دسته کلی کلاترهای همگن و ناهمگن دسته‌بندی می‌کنند. کلاترهای همگن، کلاترهایی هستند که در سلول بردهای مختلف دارای سطح توان تقریباً یکسان می‌باشند. کلاترهایی با توزیع یکنواخت سطحی و حجمی بیشتر در این دسته قرار می‌گیرند. بنابراین از دید گیرنده‌های راداری، سیگنال‌های کلاتری دریافتی از نوع همگن، معمولاً مستقل از پیش‌های آنتنی سیستم‌های راداری هستند. از طرفی کلاترهای ناهمگن با توزیع غیریکنواخت در فضا می‌باشند که این توزیع غیریکنواخت، باعث به‌وجود آمدن کلاترهایی با توزیع غیریکنواخت دامنه در سلول بردهای مختلف می‌گردد. کلاترهای نقطه‌ای در این دسته کلاترها قرار دارند [۶].

در مرجع [۷]، آشکارسازی اهداف متحرک در حضور کلاتر در رادارهای چندرودی- چندخروجی (MIMO) با استفاده از آنتن‌های گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. برای آشکارسازی هدف با داپلر کوچک، دو آشکارساز از نوع متمرکز و یک آشکارساز از نوع گسترده برای آشکارسازی اهداف در این مقاله مورد مطالعه قرار می‌گیرند و در هر دو نوع آشکارساز متمرکز و گسترده از آزمون GLRT استفاده می‌شود. منظور از آشکارساز متمرکز، آشکارسازی است که در آن سیگنال همه جفت‌های فرستنده-گیرنده به‌صورت یک بردار تجمعی در یک مرکز پردازش سیگنال مورد تحلیل و پردازش قرار می‌گیرد و آشکارسازی هدف انجام می‌شود. در مقابل، آشکارساز گسترده که آشکارساز محلی هم نامیده می‌شود، نوعی آشکارساز هستند که در آن، هر گیرنده تصمیم‌گیر در مورد وجود یا عدم وجود هدف تصمیم‌گیری می‌کند، سپس نتایج به‌دست‌آمده در یک مرکز پردازش داده با هم ترکیب می‌گردند. علی‌رغم پیچیدگی کمتر آشکارساز محلی (تصمیم‌گیری نرم) نسبت به آشکارساز متمرکز (تصمیم‌گیری سخت)، مطابق انتظار، شبیه‌سازی‌های انجام‌شده در این مقاله نشان می‌دهند که آشکارسازی هدف با سرعت کم در آشکارساز متمرکز در مقایسه با آشکارساز گسترده، عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. مرجع [۸] به مسأله آشکارسازی وقتی با استفاده از رادار MIMO در حضور کلاتر ناهمگن فضایی می‌پردازد. کوواریانس داده‌های اولیه و داده‌های ثانویه برای جفت‌های فرستنده و گیرنده یکسان و متفاوت به‌صورت ماتریس‌های تصادفی مختلف با دانش قبلی از محیط اطراف مدل می‌شود. در این مقاله، نویسندگان از استراتژی دومرحله‌ای برای طراحی آشکارساز وقتی استفاده می‌کنند. در واقع در این مقاله، ابتدا با فرض شناخته‌شده بودن ماتریس‌های کوواریانس، آشکارساز حداکثر شباهت تصمیم‌یافته (GLRT) به‌دست آورده می‌شود. در گام بعدی با استفاده از اطلاعات پیشین ماتریس کوواریانس از تخمین‌گر MAP، ماتریس کوواریانس به‌دست آمده و سپس ماتریس کوواریانس تخمین‌زده‌شده توسط MAP در آشکارساز GLRT جایگزین می‌شود. مرجع [۵] یکی از بهترین مقالات و از پیشگامان در زمینه رادارهای آرایه فازی چندرودی- چندخروجی است. این مقاله به‌صورت تحلیلی و با استفاده از شبیه‌سازی‌ها از طریق تحلیل الگوی پرتوها و نسبت‌های سیگنال به نویز ورودی به خروجی به‌دست‌آمده، نشان می‌دهد در وضعیتی که زیرآرایه‌ها دارای هم‌پوشانی کامل نیستند و بازگشتی‌های هدف برای تمام زیرآرایه‌ها به‌صورت یک متغیر تصادفی یکسان می‌باشد، می‌توان به عملکرد بهتری در زمینه آشکارسازی اهداف نسبت به رادارهای آرایه فازی^۱ (PR) و MIMO دست یافت. در واقع در این مقاله به‌خوبی بحث شده که با طراحی یک بردار وزنی برای هر زیرآرایه می‌توان پرتو را به سمت یک جهت مشخص در فضا متمرکز کرد و به بهره پردازش هم‌دوس مناسب

برسد. مشکل این گونه رادارهای چندرودی- چندخروجی آن است که با این ساختار، جمع هم‌دوس سیگنال‌های راداری امکان‌پذیر نخواهد بود و برای جبران آن بایستی زمان بیشتری بر روی هدف تابش داشته باشد و یا اینکه انرژی ارسالی به سمت هدف را افزایش داد که هر یک از این راهکارها مشکلات مخصوص به خود را دارند [۴]. نوع دیگر رادارهای چندرودی- چندخروجی به این صورت است که آنتن‌های فرستنده و گیرنده تقریباً در یک مکان قرار دارند و با فاصله کوچکی از یکدیگر جدا شده‌اند. در این رادارها چندین سیگنال متعامد به سمت هدف ارسال می‌شود و با توجه به ماهیت این سیگنال‌ها قادر خواهند بود که از خاصیت چندگانگی به نوع دیگر استفاده کرد.

رادارهای آرایه فازی برخلاف رادارهای چندرودی- چندخروجی از یک شکل موج برای ارسال استفاده می‌کنند و تنها، نسخه‌های تأخیر فاز یافته از همان شکل موج از آنتن‌های مختلف به‌صورت هم‌دوس ارسال می‌شوند. بنابراین پردازش هم‌دوس رادار آرایه فازی را قادر به ارسال توان به منطقه خاصی از فضا می‌کند. این رادارها از ساختار ساده‌تری نیز نسبت به رادارهای چندرودی- چندخروجی برخوردارند. مزایایی که رادارهای آرایه فازی برای ما فراهم می‌کنند این است که جمع‌بندی هم‌دوس سیگنال‌ها امکان‌پذیر خواهد بود. همچنین این نوع رادارها از مشکلاتی رنج می‌برند که این مشکلات در رادارهای چندرودی- چندخروجی برطرف شده‌اند. در رادارهای چندرودی- چندخروجی این امکان وجود ندارد که از بهره‌ی هم‌دوسی در فرستنده استفاده گردد.

اخیراً تلاش‌هایی برای ترکیب رادارهای چندرودی- چندخروجی تجمعی و رادارهای آرایه فازی تحت عنوان چندرودی- چندخروجی آرایه فازی صورت گرفته است [۵]. هدف این تلاش‌ها مصالحه میان رادارهای آرایه فازی و چندرودی- چندخروجی است. در ساختار رادارهای آرایه فازی، تمام آرایه‌ها به تعدادی زیرآرایه تقسیم می‌شوند. آنتن‌های زیرآرایه‌ها می‌توانند با یکدیگر اشتراک داشته باشند و از طرفی، هر زیرآرایه به‌عنوان یک رادار آرایه فازی عمل می‌کند و با انتخاب مناسب وزن‌های هر زیرآرایه، شکل‌دهی پرتو به سمت خاص انجام می‌گیرد. کلیه زیرآرایه‌ها می‌بایست پرتوی خود را به یک سمت تشکیل دهند. برای داشتن خاصیت چندرودی- چندخروجی، هر یک از زیرآرایه‌ها، یک سیگنال با شکل موج مشخص ارسال می‌کند. همان طور که گفته شد سیگنال زیرآرایه‌های مختلف بر یکدیگر عمود هستند که در این حالت، خاصیت چندرودی- چندخروجی بودن ایجاد می‌گردد.

یکی از موضوعات پراهمیت در بررسی کارکرد سیستم‌های راداری، بررسی تأثیر کلاترها بر روی عملکرد آنها می‌باشد. کلاترها در واقع سیگنال‌های بازگشتی از اهداف ناخواسته‌ای همچون کوه‌ها، موانع طبیعی و ... هستند که همگی از سطوح ناصاف و ریز تشکیل شده‌اند و این باعث به‌وجود آمدن بازگشتی‌های نامنظم و تصادفی از سطوح مختلف می‌گردد [۶]. این عدم قطعیت می‌تواند به‌صورت مدل‌های آماری بر اساس شرایط مختلف محیطی توصیف گردد. علاوه بر این، توزیع فضایی کلاترها و همچنین رفتار دینامیکی آنها باعث به‌وجود آمدن تأثیرات متنوعی بر روی فرایند آشکارسازی در سیستم‌های راداری می‌شود. با توجه به نحوه توزیع مکانی کلاترها در فضا، کلاترها معمولاً به کلاترهای نقطه‌ای، سطحی و حجمی دسته‌بندی می‌شوند. کلاترهای نقطه‌ای به مانند ساختمان بلند و کوه‌ها که در زاویه خاص و در یک فاصله مشخص از سیستم راداری قرار دارند. علاوه بر این، توزیع فضایی کلاترها بر روی تحلیل سیگنال‌های کلاتری دریافتی در گیرنده‌های راداری نیز اثر می‌گذارد. از دید گیرنده‌های راداری جهت تحلیل سیگنال‌های کلاتری، انواع توزیع فضایی کلاترها را

تحلیلی استخراج گردیده و سپس بر پایه آشکارساز بهینه استخراج شده، احتمال آشکارسازی و احتمال هشدار کاذب به صورت روابط بسته محاسبه می‌شود. تحلیل احتمال آشکارسازی و احتمال هشدار کاذب و بررسی پارامترهای مؤثر در آنها، از جمله کارهایی است که در این مقاله انجام خواهد شد.

۳) بررسی و آنالیز آشکارساز بهینه استخراج شده برای PMR در آشکارسازی اهداف در سرعت‌های کور و مقایسه آن با PRها. در این مقاله نشان داده می‌شود که یکی از مزایای رادارهای PMR با تنوع فرکانسی در مقایسه با رادارهای آرایه فازی، امکان آشکارسازی اهداف در سرعت‌های کور است.

۴) حل مسأله تخصیص توان در رادارهای PMR بر پایه بهینه‌سازی محدب و مقایسه آن با رادارهای PR. همان طور که بیشتر اشاره شد، موضوع رادارهای PMR یک موضوع بسیار نوپا و جدید می‌باشد. بحث تخصیص منابع در حوزه سیستم‌های راداری PMR تا کنون به صورت پژوهش‌های چاپ شده ارائه نگردیده است. در این مقاله، سعی شده بر پایه احتمال آشکارسازی و احتمال هشدار کاذب محاسبه شده، مسأله تخصیص توان در سیستم راداری PMR برای بیشینه کردن احتمال آشکارسازی و با قید بودجه توان فرستنده سیستم راداری فرمول بندی و سپس بر پایه بهینه‌سازی محدب حل گردد.

۵) تحلیل ریاضی تأثیر بهره چندگانگی فرکانسی بر میزان بهبود عملکرد آشکارسازی PMRها در مقایسه با PRها. موضوع پراهمیت دیگر در تحلیل رادارهای PMR، بررسی تأثیر چندگانگی فرکانسی بر عملکرد آشکارسازی اهداف می‌باشد. در این مقاله کرانی تحلیلی برای مقایسه تأثیر چندگانگی تنوع شکل موج در مقایسه با رادارهای PR ارائه شده است. اگرچه تحلیل چندگانگی در رادارهای چندورودی - چندخروجی در مقالات متعدد مطالعه شده، اما بررسی مقالات در حوزه PMR نشان می‌دهد که آنالیز چندگانگی تا کنون به صورت تحلیلی ارائه نشده است.

۶) شبیه‌سازی‌های عددی گسترده برای مشاهده تأثیر تنوع فرکانسی و همچنین میزان تأثیر محدودیت‌های عملی در عملکرد آشکارسازی اهداف در PMRها. در این مقاله اثبات می‌شود که در مدل سیستم در نظر گرفته شده، افزایش چندگانگی فرکانسی باعث بهبود عملکرد آشکارسازی رادار PMR می‌گردد؛ اما در ادامه محدودیت‌های عملی در افزایش تنوع فرکانسی مطرح خواهد شد. در بخش شبیه‌سازی نشان داده می‌شود افزایش تعداد شکل موجها از یک حد معین باعث کاهش عملکرد سیستم‌های راداری PMR می‌گردد. بررسی این محدودیت عملی تا کنون در مقاله‌ای مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است.

در این مقاله \otimes و $diag(\cdot)$ به ترتیب معرف ضرب کرونکر و عملگری برای ساخت ماتریس قطری و همچنین $\det(\cdot)$ و $E\{\cdot\}$ به ترتیب نشان‌دهنده دترمینان ماتریس و امید ریاضی (متوسط آماری) هستند.

۲- مدل سیستم

یک رادار چندورودی - چندخروجی آرایه فازی با M آنتن نزدیک به هم و با K زیرآرایه در فرستنده در نظر گرفته شده است. هر یک از زیرآرایه‌ها، سیگنال‌هایی با شکل موج $\{s_k(t)\}_{k=1}^K$ ارسال می‌کنند که دویبدو نسبت به هم دارای تعامد از نوع چندگانگی فرکانسی با فرکانس‌های $f_{c,k}, k=1, \dots, K$ می‌باشند. تخصیص آرایه به زیرآرایه‌ها

دست یافت. مرجع [۹] روش‌های جدیدی را برای پردازش وقتی فضا-زمان (STAP) در رادار چندورودی - چندخروجی (MIMO) هم‌مکان هواپایه در محیط با کلاتر غیرهمگن ارائه می‌دهد. در محیط با کلاتر غیرهمگن نمی‌توان از داده‌های آموزشی برای تخمین ماتریس کواریانس بهره برد؛ زیرا ویژگی‌های آماری تداخل برای تخمین ماتریس کواریانس تداخل در دسترس نیست. بنابراین نویسندگان دو روش را برای پردازش وقتی فضا-زمان (STAP) ارائه می‌دهند. طرح اول بر پایه تصویر عمود بر زیرفضای کلاتر بنا نهاده شده که این برای سناریوهایی که امضای (الگوی) کلاتر شناخته شده است، قابل اجراست. برای این منظور در ابتدا ماتریسی که مشخصه کلاتر زمینی در رادارهای آرایه فازی چندورودی - چندخروجی هواپایه را نشان می‌دهد، استخراج می‌گردد. در طرح دوم که زیرفضای کلاتر ناشناخته است، نویسندگان طرحی را پیشنهاد می‌دهند که تداخل را بدون نیاز به ماتریس کواریانس تداخل از بین می‌برند. در طرح اخیر، پارامترهای تعیینی در پردازش رادار Phased MIMO STAP، با کمک به حداکثرسازندن میزان آزادی تعیین می‌شود. در مرجع [۱۰] به طراحی توأم کد انتقال فضا-زمان (STTC) چندورودی - چندخروجی و فیلتر گیرنده فضا-زمان (STRF) به منظور بهبود قابلیت تشخیص یک هدف در حال حرکت در محیط با کلاتر وابسته به سیگنال با عدم اطمینان در زاویه سمت هدف و فرکانس داپلر پرداخته می‌شود. نویسندگان در این مقاله از نسبت سیگنال به تداخل به علاوه نویز (SINR) به عنوان یک تابع هدف برای به حداکثرسازندن آن استفاده می‌نمایند. محدودیت‌های چندگانه STTCها در مرحله طراحی (مثلاً محدودیت‌های شباهت و ماژول‌ها و همچنین نیاز به تأمین توان یکنواخت در بین آنتن‌های انتقال‌دهنده) باعث می‌شوند که برای مقابله با مشکل این طراحی، یک مسأله بهینه‌سازی غیرمحدب فرمول بندی گردد. برای حل مسأله فرمول بندی شده، یک روش تکراری مبتنی بر چارچوب بهینه‌سازی حریص متوالی (SGO) توسط نویسندگان پیشنهاد می‌گردد.

پس از مرور مقالات در زمینه پردازش سیگنال و آشکارسازی اهداف در رادارهای چندورودی - چندخروجی و رادارهای آرایه فازی در محیط با کلاتر، در ادامه می‌توان نوآوری‌های انجام شده در این مقاله را به صورت خلاصه به شرح زیر بیان نمود:

۱) بررسی و آنالیز رادارهای PMR^۳ (رادار آرایه فازی چندورودی - چندخروجی) با ویژگی تنوع فرکانسی که در مقالات در حوزه PMR تا کنون به آن پرداخته نشده است. در سال‌های اخیر، مقالاتی هرچند بسیار کم در حوزه رادارهای PMR ارائه شده؛ اما در این مقالات تحلیل ریاضی رادارهای PMR با تنوع فرکانسی مورد بحث قرار نگرفته است. سعی نویسندگان در این مقاله بر آن بوده که گام‌های نخست در زمینه معرفی و آنالیز ریاضی رادارهای PMR با تنوع فرکانسی برداشته شود.

۲) استخراج آشکارساز بهینه و محاسبه احتمال آشکارسازی و احتمال هشدار کاذب بر پایه PMR با تنوع فرکانسی. مهم‌ترین هدف در هر نوع سیستم راداری، بررسی عملکرد سیستم راداری به لحاظ آشکارسازی اهداف است. در این مقاله برای بررسی کارایی رادارهای PMR با تنوع فرکانسی و مقایسه آن با رادارهای آرایه فازی و رادارهای چندورودی - چندخروجی مرسوم، آشکارساز بهینه به شکل

1. Space-Time Transmit Code
2. Space-Time Receive Filter
3. Phased MIMO Radar

اینجا فرض می‌گردد که در یک زمان دوئل^۱ (مدت زمان بیم بر روی هدف) تعداد L پالس برای آشکارسازی هدف مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین با توجه به L پالس دریافتی می‌توان بردار سیگنال دریافتی

$$y_r(t) \in C^{LN \times 1} \text{ در گیرنده‌ای با } N \text{ آنتن را به صورت زیر نوشت} \quad (3)$$

$$y_r(t) = \sum_{k=1}^k v_k(\theta, \theta') \otimes d_k(L, f_{d,k}) S_k(t - \tau_r) e^{-j\gamma\pi f_{c,k} \tau_r} + c_k S_k(t) + n(t)$$

که بردار دامنه سیگنال کلاتر دریافتی با ابعاد $LN \times 1$ ، $n(t)$ بردار نویز، مدت زمان تأخیر رسیدن سیگنال‌ها از فرستنده به گیرنده و τ_r بردار هدایت زمانی در گیرنده است که به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود

$$d_k(L, f_{d,k}) = [e^{j\gamma\pi f_{d,k} T_1} \dots e^{j\gamma\pi f_{d,k} (L-1) T_1}]^T \quad (4)$$

در رابطه اخیر، $f_{d,k}$ فرکانس داپلر هدف نسبت به زیرآرایه k ام و T_1 فاصله زمانی تکرار پالس (PRI) است. همچنین $v_k(\theta, \theta')$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v_k(\theta, \theta') = \sqrt{p_k} \beta_k(\theta) (w_k^H a_k(\theta)) b_k(\theta') \quad (5)$$

که $a_k(\theta)$ بردار هدایت مکانی مربوط به هدف در فرستنده و $b_k(\theta')$ بردار هدایت مکانی در گیرنده است که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$a_k = [e^{j\gamma\pi d_1 \sin \theta / \lambda_k} \dots e^{j\gamma\pi d_{(M-1)} \sin \theta / \lambda_k}]^T \quad (6)$$

$$b_k(\theta') = [e^{j\gamma\pi d_1 \sin \theta' / \lambda_k} \dots e^{j\gamma\pi d_{(N-1)} \sin \theta' / \lambda_k}]^T \quad (7)$$

همچنین $\beta_k(\theta)$ ضریب افت هدف مربوط به شکل موج زیرآرایه k ام می‌باشد که به شماره سیگنال ارسالی وابسته است. باید یادآوری شود که β_k در واقع پارامتری است که هم به ضریب انعکاس هدف و هم اثر افت مسیر بستگی دارد. اگر بخش ضریب انعکاس را با $\sigma_k^{(RCS)}$ و اثر افت

مسیر را با $P_{L,k}$ نمایش دهند، β_k می‌تواند به صورت زیر مدل گردد

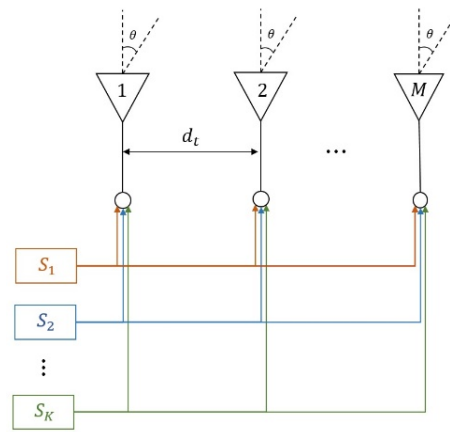
$$\beta_k = \sigma_k^{(RCS)} P_{L,k} \quad (8)$$

که در رابطه بالا $P_{L,k}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

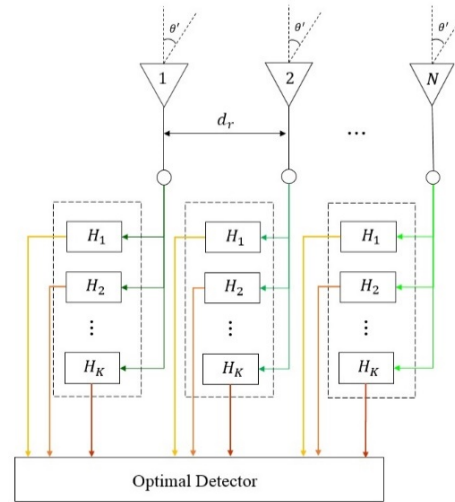
$$P_{L,k} = \sqrt{\frac{\lambda_k^2}{(4\pi)^2 R_t^T R_r^T L_a}} \quad (9)$$

که R_r و R_t به ترتیب فاصله هدف تا فرستنده و فاصله هدف تا گیرنده، λ_k طول موج سیگنال ارسالی زیرآرایه k ام و L_a تلفات آنتن گیرنده است. در این مقاله فرض شده که در گیرنده طبق شکل ۱-ب، پشت هر آرایه، یک بانک فیلتری منطبق با شکل موج‌های ارسالی $S_k(t)$ وجود دارد که سیگنال دریافتی در هر آرایه از این بانک فیلتری عبور داده می‌شود. علاوه بر این در گیرنده سیستم‌های راداری، هر قطاع زاویه‌ای از فضا به سلول بردهای مختلف، تقسیم و در هر سلول برد، نمونه‌برداری انجام می‌شود. بنابراین اگر سیگنال‌های دریافتی عبوری از فیلتر منطبق با شکل موج k ام در طول زمان دوئل و برای هر زیرآرایه برای سلول برد تحت آزمایش، نمونه‌برداری و جبران فاز صورت گیرد، بردار نمونه‌های سیگنال در هر رنج گیت از زیرآرایه k ام $y_k \in C^{LN \times 1}$ به شکل زیر به دست می‌آید

$$y_k = r_k + c_k + n_k \quad (10)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱: (الف) بخش فرستنده و (ب) بخش گیرنده رادار Phased MIMO.

می‌تواند بر اساس محدودیت‌های مختلف با هم‌پوشانی و بدون هم‌پوشانی باشد. در این مقاله فرض می‌شود که تمام زیرآرایه‌ها بدون محدودیت دارای بهره همدوسی کامل می‌باشند. در واقع این بدین معنا خواهد بود که هر زیرآرایه از کل M آنتن بهره می‌برد. شکل ۱ مدل سیستم شبکه را نشان می‌دهد. شکل ۱-الف بخش فرستنده را نشان می‌دهد که از آرایه‌های خطی که با فاصله d_r از هم جدا شده‌اند، تشکیل شده‌اند. علاوه بر این، θ زاویه‌ای است که هدف با راستای آرایه‌ها می‌سازد. همچنین شکل ۱-ب بخش گیرنده را نشان می‌دهد که در آن d_r و θ' به ترتیب فاصله آرایه‌ها از هم و زاویه تحت آزمایش می‌باشد.

با توجه به توضیحات داده‌شده، بردار سیگنال ارسالی آرایه $x_{tr}(t) \in C^{M \times 1}$ در باند پایه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_{tr} \triangleq \sum_k = \sqrt{p_k} w_k S_k(t), \quad 0 \leq t \leq \tau_p \quad (1)$$

که در رابطه بالا، $w_k \in C^{M \times 1}$ بردار شکل‌دهی بیم برای زیرآرایه k ام است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$w_k = [w_{1,k} w_{2,k} \dots w_{M,k}]^T \quad (2)$$

علاوه بر این دقت شود که در رابطه بالا τ_p به ترتیب نشان‌دهنده مدت زمان طول یک پالس ارسالی بوده و p_k معرف توان اختصاص‌یافته به شکل موج ارسالی برای زیرآرایه k ام می‌باشد. در عمل در یک سیستم راداری، بیش از یک پالس برای آشکارسازی اهداف استفاده می‌شود. در

به صورت متغیرهای تصادفی iid گوسی مختلط با توزیع $CN(0, \sigma_{c,k}^2)$ در نظر گرفته می‌شوند که در آن $\sigma_{c,k}^2$ واریانس ضرایب بازگشتی‌های کلاتر است که به شماره هر زیرآرایه وابسته می‌باشد. علاوه بر این N_f تعداد مؤثر مؤلفه‌های فرکانسی سازنده سیگنال کلاتر است. با توجه به توضیحات داده شده، ماتریس خودهمبستگی بردار سیگنال کلاتر c_k را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$\sum_{c,k} = E\{c_k c_k^H\} = E\{(c_k^{(s)} \otimes c_k^{(t)})(c_k^{(s)} \otimes c_k^{(t)})^H\} \quad (15)$$

با توجه به خاصیت ضرب‌های کرونکر آورده شده در [۱۲]، (۱۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{c,k} = E\{c_k c_k^H\} = E\{(c_k^{(s)}(c_k^{(s)})^H \otimes c_k^{(t)}(c_k^{(t)})^H)\} \quad (16)$$

با توجه به خطی بودن عملگر $E\{\cdot\}$ ، رابطه اخیر می‌تواند به صورت زیر خلاصه شود

$$\sum_{c,k} = \sum_{c,k}^{(s)} \otimes \sum_{c,k}^{(t)} \quad (17)$$

که در رابطه بالا، $\sum_{c,k}^{(s)} = c_k^{(s)}(c_k^{(s)})^H$ ماتریس همبستگی فضایی کلاتر و $\sum_{c,k}^{(t)} = E\{c_k^{(t)}(c_k^{(t)})^H\}$ ماتریس همبستگی زمانی کلاتر تعریف می‌شود. در (۱۷)، ماتریس همبستگی مکانی بین پالس‌های وابسته به سیگنال زیرآرایه k ام دریافتی برای یک لحظه خاص و $\sum_{c,k}^{(t)}$ معرف همبستگی زمانی پالس‌های ورودی سیگنال زیرآرایه k ام در یک آرایه معین گیرنده است. برای راحتی پردازش، بردارهای r ، c و n به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$y = [y_1^T \ y_2^T \ \dots \ y_k^T]^T \quad (18)$$

$$r = [r_1^T \ r_2^T \ \dots \ r_k^T]^T \quad (19)$$

$$c = [c_1^T \ c_2^T \ \dots \ c_k^T]^T \quad (20)$$

$$n = [n_1^T \ n_2^T \ \dots \ n_k^T]^T \quad (21)$$

به طور کلی می‌توان (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$y = r + c + n \quad (22)$$

انتهای این بخش به معرفی ماتریس همبستگی بردار مجموع سیگنال کلاتر و نویز $c+n$ با سمبل \sum_{cn} اختصاص دارد؛ یعنی

$$\sum_{cn} = E\{(c+n)(c+n)^H\} \quad (23)$$

با توجه به استقلال بردارهای نویز و کلاتر و میانگین صفر بودن آنها می‌توان \sum_{cn} را به صورت $\sum_{cn} = \sum_c + \sigma_n^2 I_{NLK}$ نوشت. از طرفی با

توجه به ویژگی‌های تعامد سیگنال‌های زیرآرایه‌های مختلف، یک ماتریس قطری بلوکی خواهد بود. بنابراین با توجه به قطری بودن ماتریس همبستگی نویز، \sum_{cn} را نیز می‌توان به صورت یک ماتریس قطری بلوکی به صورت زیر نمایش داد

$$\sum_{cn} = \text{diag}(\sum_{cn,1}, \sum_{cn,2}, \dots, \sum_{cn,k}) \quad (24)$$

که $\sum_{cn,k} = \sum_{c,k} + \sigma_n^2 I_{NL}$ است.

۳- طراحی آشکارساز بهینه

در بخش قبل به تشریح مدل سیستم و سیگنال دریافتی در گیرنده پرداخته شد. به طور کلی برای آشکارسازی سیگنال‌های بازگشتی در محیط

که در آن $r_k = v_k(\theta, \theta') \otimes d_k(L, f_{d,k})$ است. همچنین n_k بردار نویز خارج شده از فیلتر منطبق با شکل موج k ام می‌باشد که یک بردار تصادفی با توزیع گوسی دایروی مختلط $CN(0, \sigma_n^2 I_{NL})$ است. به طور کلی، کلاترها می‌توانند به عنوان هدف‌های نخواستی در محیط به صورت‌های مختلف مدل گردند. یکی از ویژگی‌های مهم سیگنال کلاتر، همبستگی زمانی بین آنهاست. در این مقاله، علاوه بر همبستگی زمانی بین کلاترها، همبستگی مکانی بین کلاترها نیز در نظر گرفته خواهد شد. منظور از همبستگی مکانی، همبستگی بین سیگنال‌های دریافتی در شماره آنتن‌های مختلف گیرنده است. کلاتر در این مقاله، ناهمگن و به صورت نقطه در زاویه θ_c نسبت به آرایه‌های گیرنده در نظر گرفته می‌شود. در این وضعیت، $c_k^{(s)}$ که بردار هادی فضایی مربوط به کلاتر در گیرنده راداری است به صورت زیر تعریف می‌شود

$$c_k^{(s)} = [e^{j\gamma\pi d_r \sin \theta_c / \lambda_k} \ \dots \ e^{j\gamma\pi d_r (N-1) \sin \theta_c / \lambda_k}]^T \quad (11)$$

علاوه بر این، $c_k^{(t)}$ به عنوان بردار هادی زمانی مربوط به کلاتر معرفی می‌شود که در واقع، همبستگی زمانی بین سیگنال‌های دریافتی کلاتر را نشان می‌دهد. پرواضح است که با توجه به نحوه بیان نمونه‌های بردار سیگنال هدف در (۱۰)، بردار نمونه‌های سیگنال کلاتر c_k را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$c_k = c_k^{(s)} \otimes c_k^{(t)} \quad (12)$$

همان طور که قبلاً به آن اشاره شد، یکی از ویژگی‌های مهم کلاترها همبستگی زمانی بین نمونه‌های کلاترهای یک شکل موج خاص است. منظور از همبستگی زمانی نمونه‌های کلاتر، وابستگی نمونه‌های یک سیگنال در خروجی یک فیلتر منطبق مشخص (مربوط به یک سیگنال متعامد در یک گیرنده مشخص) می‌باشد. در این مقاله، همبستگی زمانی کلاتر وابسته به زیرآرایه k ام دریافتی به فرم نمایی مدل می‌گردد. اگر $R_k(\tau)$ تابع خودهمبستگی زیرآرایه k ام باشد، بنابراین [۱۱]

$$R_k(\tau) = K_c e^{-\gamma_k |\tau|} \quad (13)$$

دقت شود که در این نمایش، $R_k(\tau)$ میزان وابستگی زمانی بین سیگنال‌های کلاتر با اختلاف زمانی τ را در شکل موج وابسته به زیرآرایه k ام نشان می‌دهد. در (۱۳)، γ_k ضریب تناسب همبستگی و ضریب K_c ، یک ضریب نرمال کننده برای توان دریافتی از سیگنال کلاتر می‌باشد. دقت شود که با توجه به توضیحات داده شده، در یک رادار عملیاتی، مقدار τ بین ۰ و T_d قرار دارد. پرواضح است که رابطه $T_d = LT_I$ بین مدت زمان دوئل با PRI و تعداد پالس‌های پردازش همدوس برقرار است. همچنین از (۱۳) می‌توان چگالی طیف توان کلاتر را به صورت $B_{c,k} = \gamma_k / 2\pi$ حساب کرد که $S_c(f) = K_s \frac{1}{1+(f/B_{c,k})^2}$

و $K_s = 2K_c / \gamma_k$ هستند. از طرفی عملاً کلاترها به عنوان بازگشتی‌های ناخواسته دارای ماهیت تصادفی هستند. اگر عنصر m بردار هدایت زمانی کلاتر $c_k^{(t)}(m)$ با $c_k^{(t)}(m)$ نمایش داده شود، با توجه به رابطه چگالی طیف توان می‌توان سیگنال کلاتر دریافتی را به صورت زیر مدل نمود

$$c_k^{(t)}(m) = A_c \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\alpha_{c,i}}{1+(f_i/B_{c,k})^2} e^{j\gamma\pi f_i (m-1)T_I} \quad (14)$$

که در رابطه بالا A_c ضریب نرمالایز کننده، $B_{c,k}$ پهنای باند مؤثر کلاتر و $\alpha_{c,i}$ ضریب بازگشتی کلاترها برای هر مؤلفه فرکانسی است که

$$\ln(\Lambda_{LRT}) = \sum_{k=1}^K \Re \{ r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k \} - \sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k \stackrel{H_1}{>} \ln \delta \quad (31)$$

با توجه به اینکه جمله دوم در سمت چپ نامساوی (۳۱) فاقد هر گونه نمونه سیگنال دریافتی y_k است، برای به دست آوردن معیار آشکارسازی می‌تواند به سمت راست نامساوی، منتقل و با $\ln \delta$ ترکیب گردد؛ بنابراین

$$T = \sum_{k=1}^K \Re \{ r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k \} \stackrel{H_1}{>} Th \quad (32)$$

که T آمارگان کافی می‌باشد. از (۳۲) پرواضح است که آشکارساز بهینه سعی می‌کند با توجه به ماتریس $\sum_{cn,k}^{-1}$ که در بردار سیگنال‌های دریافتی ضرب شده است، در راستای کلاتر نال ببیند و با توجه به بردار هادی سلول تحت تست r_k^H ، پیک فیلتر پردازش را در راستای سلول تحت تست قرار دهد. احتمال هشدار کاذب در این وضعیت می‌تواند به صورت زیر به راحتی محاسبه شود

$$P_{fa}^{(PMR)} = Q\left(\frac{Th}{\sigma_{cn}}\right) \quad (33)$$

که در رابطه بالا $\sigma_{cn} = (1/\sqrt{2}) \sqrt{\sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k}$ انحراف معیار توأم کلاتر و نویز فیلتر شده نامیده می‌شود که مطابق با پیوست الف محاسبه گردیده است. در مورد آشکارساز نیمین-پیرسون به طور خلاصه می‌توان گفت که در این آشکارساز به ازای یک نرخ هشدار غلط معین، مقدار آستانه به دست آورده می‌شود. برای این منظور به ازای نرخ هشدار غلط مطلوب $P_{fa}^{(th)}$ ، با استفاده از (۳۳) به دست می‌آید

$$Th = \sigma_{cn} Q^{-1}(P_{fa}^{(th)}) \quad (34)$$

به طور مشابه، احتمال آشکارسازی اهداف را هم می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود

$$P_d^{(PMR)} = Q\left(\frac{Th - A}{\sigma_{cn}}\right) \quad (35)$$

که در بالا، $A = \sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k$ تعریف می‌شود که در پیوست الف نحوه محاسبه آن ارائه شده است.

۴- تخصیص توان در رادارهای چندورودی- چندخروجی آرایه فازی

این بخش به موضوع تخصیص توان در رادارهای MIMO آرایه فازی با تنوع فرکانسی تعلق دارد. همان طور که مشاهده شد، آشکارساز بهینه با فرض شناخت کامل از ضریب انعکاسی هدف به ازای هر سیگنال متعامد فرکانسی استخراج گردید. در ادامه برای بیشینه کردن احتمال آشکارسازی هدف، تخصیص بهینه توان به سیگنال‌های متعامد فرکانسی بر اساس اطلاعات موجود از ضریب بازگشتی هدف و با در نظر گرفتن محدودیت در توان بیشینه رادار پیشنهاد می‌گردد. برای این منظور، مسئله بهینه‌سازی تخصیص توان به سیگنال‌های متعامد به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود

با کلاتر در رادارهای مرسوم آرایه فازی از سه فیلتر شکل موج، فیلتر مکانی و فیلتر زمانی (کنسل‌کننده) استفاده می‌شود. به طور مشابه در رادارهای چندورودی- چندخروجی آرایه فازی از یک بانک فیلتری شکل موج برای جدا کردن شکل موج‌های مختلف ارسالی بهره می‌گیرند. با توجه به تعامد چندگانگی فرکانسی می‌توان سیگنال‌های بازگشتی با شکل موج‌های متفاوت را با یک بانک از فیلترهای منطبق از همدیگر جدا کرد. حال در ادامه سعی می‌شود آشکارساز بهینه بر پایه فرض شناخته‌بودن ضریب انعکاس هدف به ازای سیگنال‌های مختلف استخراج شود. هنگامی که ضرایب بازگشتی هدف شناخته‌شده است، $\sigma_k^{(RCS)}$ یک عدد مختلط تعیینی خواهد بود. در این وضعیت، آزمون فرضیه با توجه به (۲۲) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{cases} H_1: y = c + n \\ H_0: y = r + c + n \end{cases} \quad (25)$$

در رابطه بالا، H_1 فرضیه عدم حضور هدف و H_0 فرضیه حضور هدف است. طبق [۱۳] و [۱۴] از آزمون نیمین-پیرسون جهت استخراج آشکارساز بهینه استفاده می‌شود و برای این منظور، نسبت درست‌نمایی (LRT) یا Λ را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود

$$\Lambda_{LRT} \triangleq \frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)} \stackrel{H_1}{>} \delta \quad (26)$$

باید توجه کرد که بردار دریافتی y ، یک بردار از متغیرهای تصادفی گوسی مختلط است که برای فرضیه H_1 تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$f(y|H_1, \sum_{cn}) = \frac{1}{\pi^{MNL} \det(\sum_{cn})} e^{-(y^H \sum_{cn}^{-1} y)} \quad (27)$$

با توجه به اینکه \sum_{cn} یک ماتریس قطری بلوکی است، (۲۷) می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود

$$f(y|H_1, \sum_{cn}) = \frac{1}{\pi^{MNL} \prod_{k=1}^K \det(\sum_{cn,k})} e^{-\sum_{k=1}^K (y_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k)} \quad (28)$$

به طور مشابه برای فرضیه H_0 ، تابع چگالی احتمال به صورت زیر به دست آورده می‌شود

$$f(y|H_0, \sum_{cn}) = \frac{1}{\pi^{MNL} \prod_{k=1}^K \det(\sum_{cn,k})} e^{-\sum_{k=1}^K (y_k - r_k)^H \sum_{cn,k}^{-1} (y_k - r_k)} \quad (29)$$

از (۲۶) و تابع چگالی احتمال‌های به دست آمده، آزمون نسبت درست‌نمایی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\Lambda_{LRT} = e^{-\sum_{k=1}^K ((y_k - r_k)^H \sum_{cn,k}^{-1} (y_k - r_k)) + \sum_{k=1}^K (y_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k)} \stackrel{H_1}{>} \delta \quad (30)$$

از طرفی، معمولاً برای سادگی محاسبات از $\log \Lambda$ یا همان آزمون لگاریتم نسبت درست‌نمایی استفاده می‌شود که در این صورت با کمی محاسبات ریاضی به دست خواهد آمد

رادار PR می‌گردد، ولی عملکرد رادار چندورودی- چندخروجی آرایه فازی از رادار صرفاً آرایه فازی بهتر خواهد بود که این بهتر بودن به انتخاب زیرآرایه بهینه و یا به عبارتی دیگر بهره‌برداری از چندگانگی شکل موج در انتخاب فرکانس بهینه باز می‌گردد. از طرفی در واقعیت، ضریب انعکاسی هدف به ازای هر سیگنال متعامد، یک متغیر تصادفی است که هر چند مدت به‌طور تصادفی تغییر خواهد کرد و تنها با مشاهده نمونه‌های دریافتی، تخمین زده می‌شود. ضرایب بازگشتی هدف یا همان β_k ها در [۳] به‌صورت یک متغیر تصادفی گوسی مختلط دایروی متقارن با توزیع $\beta_k \sim CN(0, \sigma_{t,k}^2)$ در نظر گرفته شده‌اند. انتخاب زیرآرایه بهینه و تخصیص توان رادار به آن با فرض اینکه تخمین نسبتاً دقیقی از ضرایب بازگشتی هدف دارد صورت می‌گیرد و بعد از تغییر تصادفی ضرایب بازگشتی، مجدداً مقادیر آنها تخمین زده شده و انتخاب زیرآرایه بهینه به‌روز می‌گردد. نکته بسیار مهم دیگر در مورد بازگشتی‌های هدف این است که با توجه به چندگانگی فرکانسی، بازگشتی‌های هر زیرآرایه با زیرآرایه دیگر مستقل می‌باشد. در واقعیت اگر فرکانس‌های حامل در نظر گرفته شده برای زیرآرایه‌ها به اندازه کافی از هم فاصله داشته باشند، بازگشتی‌های هر زیرآرایه نسبت به زیرآرایه دیگر ناهمبسته خواهد بود. در این وضعیت گفته می‌شود که ضرایب بازگشتی هدف ناهمبسته فرکانسی هستند [۱۶]. شرط این ناهمبستگی وجود حداقل اختلاف فرکانسی بین حامل‌ها به اندازه $\Delta f_{\min} = c/(2L \sin \theta)$ است که در رابطه اخیر، L طول هدف و $L \sin \theta$ تصویر طول هدف بر روی خط دید رادار می‌باشد. بنابراین فرض شده که فرکانس‌های حامل طراحی شده این شرط را ارضا می‌کنند و ضرایب بازگشتی هدف به‌ازای زیرآرایه‌های مختلف ناهمبسته‌اند. برای بررسی دقیق‌تر میزان بهبود عملکرد آشکارسازی در رادارهای چندورودی- چندخروجی آرایه فازی در مقایسه با رادارهای مرسوم آرایه فازی می‌توان متوسط احتمال آشکارسازی آنها را با هم مقایسه کرد. با توجه به ماهیت تابع $Q(\cdot)$ در (۳۵)، محاسبه متوسط احتمال آشکارسازی بهینه یعنی $E\{P_d\}$ در رادار PMR دشوار است. لذا برای ارزیابی عملکرد از تابع هدف معادل با بیشینه‌کردن احتمال آشکارسازی یعنی تابع هدف مطرح در (۳۷) استفاده می‌شود که $r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k$ در واقع معرف سیگنال به کلاتر به‌اضافه نویز $(SCNR)^T$ بعد از فیلترینگ فضا- زمان می‌باشد. بنابراین متوسط $SCNR$ در رادارهای PMR برابر خواهد بود با

$$SCNR_{PMR} = E\{\max_{\{P_k\}} \{r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k\}\} = \quad (40)$$

$$p_{\max} E\{\max_{\{\beta_k\}} \{|\beta_k|^2 z_k^H \sum_{cn,k}^{-1} z_k\}\}$$

که $Z_k = W_k^H a_k(\theta) b_k(\theta') \otimes d_k(L, f_{d,k})$ و با توجه به توزیع متغیر تصادفی β_k ، متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر $2\sigma_{t,k}^2$ است. حال اگر متغیر تصادفی $\beta_k = \max_{\{P_k\}} \{|\beta_k|^2 z_k^H \sum_{cn,k}^{-1} z_k\}$ تعریف شود، تابع چگالی احتمال آن برابر خواهد بود با (به پیوست ج مراجعه شود)

$$f_{\beta_{\max}}(\beta_{\max}) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{2\sigma_k^2} e^{-\frac{\beta_{\max}}{2\sigma_k^2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K (1 - e^{-\frac{\beta_{\max}}{2\sigma_j^2}}) \quad (41)$$

که در آن σ_k^2 مطابق با پیوست ج محاسبه می‌شود. بنابراین برای محاسبه $SCNR_{PMR}$ به‌دست خواهد آمد

$$P_V: \begin{cases} \max_{\{P_k\}} P_d \equiv \max_{\{P_k\}} Q\left(\frac{Th-A}{\sigma_{cn}}\right) \\ \sum_{k=1}^K P_k \leq p_{\max} \quad (I) \\ p_k \geq 0, \forall k \quad (II) \end{cases} \quad (36)$$

با توجه به آنکه $Q(v)$ تابعی اکیداً نزولی نسبت به مقدار v است [۱۵]، $\max_{\{P_k\}} Q\left(\frac{Th-A}{\sigma_{cn}}\right)$ به شکل معادل می‌تواند به فرم زیر در نظر گرفته شود

$$\max_{\{P_k\}} Q\left(\frac{Th-A}{\sigma_{cn}}\right) \equiv \min_{\{P_k\}} \{Q^{-1}(P_{fa}^{(th)}) - \sqrt{2 \sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k}\} \equiv \max_{\{P_k\}} \sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k \quad (37)$$

حال اگر بردار نرمالیزه q_k به‌صورتی تعریف گردد که $r_k = \sqrt{p_k} q_k$ شود، تابع هدف حاصل در (۳۷) را به‌صورت $\max_{\{P_k\}} \{\sum_{k=1}^K p_k q_k^H \sum_{cn,k}^{-1} q_k\}$ می‌توان نمایش داد که در آن به ازای هر k ، $q_k^H \sum_{cn,k}^{-1} q_k$ یک اسکالر همواره مثبت خواهد بود. با تعریف $r_k = q_k^H \sum_{cn,k}^{-1} q_k$ مسأله P_V را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$P_V': \begin{cases} \max_{\{P_k\}} \sum_{k=1}^K \gamma_k P_k \\ \sum_{k=1}^K P_k \leq p_{\max} \quad (I) \\ P_k \geq 0 \quad (II) \end{cases} \quad (38)$$

لم ۱: جواب بهینه مسأله P_V' منجر به تخصیص کل توان تنها به یک زیرآرایه می‌گردد. اگر p_k^* جواب بهینه توان تخصیصی به زیرآرایه k ام باشد، به‌دست می‌آید

$$p_k^* = \begin{cases} p_{\max}, & k = \arg_m \max \{\gamma_m\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (39)$$

اثبات: به پیوست ب مراجعه شود.

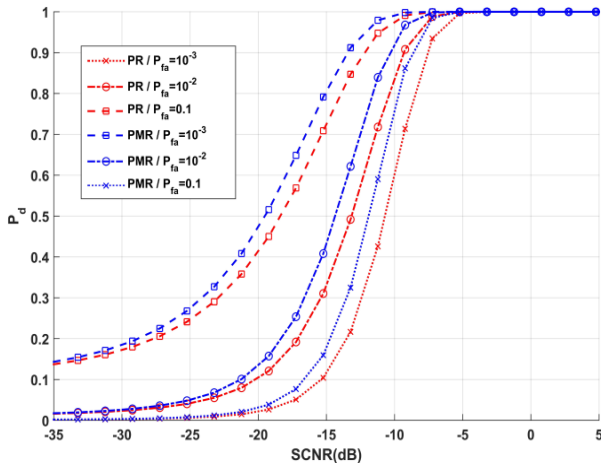
با توجه به فرم جواب حاصل در لم ۱ می‌توان دریافت برای وقتی که ضریب بازگشتی هدف به‌ازای تک‌تک سیگنال‌های متعامد فرکانسی در دسترس است، حل مسأله تخصیص توان منجر به طرح انتخاب زیرآرایه بهینه^۱ می‌شود. همان‌طور که در (۳۹) مشاهده می‌شود، پارامتر اصلی در انتخاب یکی از زیرآرایه‌ها به‌عنوان زیرآرایه بهینه، γ_k است. از وابستگی γ_k به $\sum_{cn,k}^{-1}$ و q_k می‌توان نتیجه گرفت که γ_k با توجه به (۱۴)، با واریانس بازگشتی‌های کلاتر $\sigma_{c,k}^2$ رابطه معکوس و با توجه به تعریف q_k با β_k که معرف بازگشتی هدف می‌باشد، رابطه مستقیم دارد. در واقع زیرآرایه‌ای که به ازای آن نسبت توان بازگشتی هدف به توان دریافتی کلاتر به اضافه نویز بعد از فیلترینگ فضا- زمان بیشترین مقدار را دارد به‌عنوان زیرآرایه بهینه انتخاب خواهد شد. نکته بسیار مهم دیگر این است که اگرچه در وضعیت تخصیص توان بهینه، رادار PMR تبدیل به یک

فاصله فرکانسی بین حامل‌ها برای مستقل شدن ضرایب انعکاسی هدف، تعداد زیرآرایه‌ها به $BW/\Delta f_{\min}$ محدود خواهد شد. علاوه بر این در لم ۲ نشان داده می‌شود که در یک وضعیت خاص که در آن در ضعیف‌ترین وضعیت چندگانگی (بازگشتی‌ها با واریانس‌های تقریباً یکسان برای هر زیرآرایه وجود دارد، بهبود $SCNR_{PMR}$ در مقایسه با $SCNR_{PR}$ برابر با $10 \log_{10}(\sum_{k=1}^K 1/k) dB$ می‌باشد.

لم ۲: در ضعیف‌ترین وضعیت چندگانگی، میزان بهبود $SCNR_{PMR}$ در مقایسه با $SCNR_{PR}$ برابر با $10 \log_{10}(\sum_{k=1}^K 1/k) dB$ است.

اثبات: به پیوست ج مراجعه شود.

قبل از اتمام این بحث، لازم است دو ملاحظه عملی در این بخش مطرح گردد. ملاحظه اول از لم ۱ به دست می‌آید. از لم ۱ می‌توان دریافت



شکل ۳: مقایسه احتمال آشکارسازی در رادارهای PMR و PR با احتمال هشدار کاذب متفاوت.

از آنجا که $\sum_{k=1}^K 1/k$ اساساً یک سری ناهمگرا است، با افزایش تعداد زیرآرایه‌ها می‌توان به بهبود در عملکرد آشکارسازی قابل توجهی دست یافت. ولی با افزایش خیلی زیاد K ، عملاً بهبود آشکارسازی بسیار کاهش می‌یابد. یعنی از K معینی، احتمال آشکارسازی عملاً تغییر چندانی نمی‌کند. ملاحظه عملی دوم، این است که رادارها معمولاً دارای پهنای باند اختصاصی معین W هستند. بنابراین مقدار K را می‌توان تا جایی افزایش داد که شرط $W/K > \Delta f_{\min}$ همچنان برقرار باشد؛ چرا که در این صورت بازگشتی‌های زیرآرایه‌های مختلف نسبت به هم وابسته خواهند شد. در ادامه و در بخش شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که چگونه میزان همبستگی بازگشتی‌های زیرآرایه‌های مختلف نسبت به هم باعث کاهش احتمال آشکارسازی هدف می‌گردد.

۵- نتایج شبیه‌سازی عددی

در این بخش سعی می‌شود با شبیه‌سازی به بررسی آشکارسازی استخراج‌شده و ارزیابی الگوریتم‌های پیشنهادی پرداخته شود. برای این منظور، یک رادار آرایه فازی چندرویی- چندخروجی با مشخصات راداری که در جدول ۱ آمده است، در نظر گرفته می‌شود.

شکل ۲ احتمال آشکارسازی هدف را با فرض $P_{fa}^{(th)} = 0.1$ و زاویه هدف $\theta = 40^\circ$ نمایش می‌دهد (در عمل $P_{fa}^{(th)}$ کوچک‌تر از 10^{-2} می‌باشد؛ ولی به‌خاطر کاهش بار محاسباتی، مقادیر بزرگ‌تر در نظر گرفته شده است). در این شکل نتایج فرمول بسته ارائه‌شده (۳۵) با نتایج شبیه‌سازی فرایند آشکارسازی که به روش مونت کارلو با تعداد ۱۰۰۰ نمونه تصادفی به‌دست آمده است، برحسب نسبت $SCNR$ ورودی در

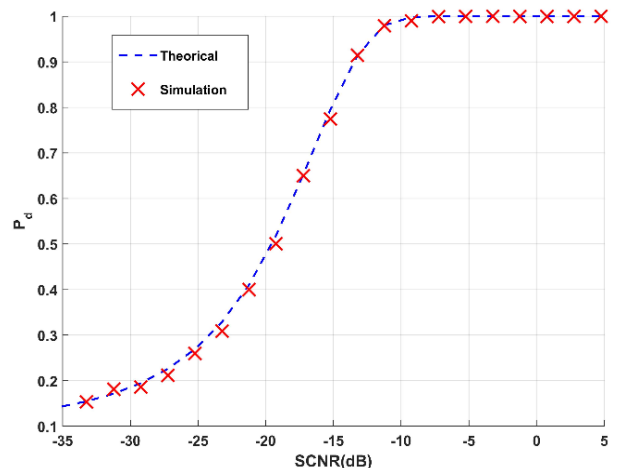
$$\overline{SCNR}_{PMR} =$$

$$p_{\max} \int \sum_{k=1}^K \frac{\beta_{\max}}{\gamma \sigma_k^2} e^{-\frac{\beta_{\max}}{\gamma \sigma_k^2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K (1 - e^{-\frac{\beta_{\max}}{\gamma \sigma_j^2}}) d\beta_{\max} \quad (42)$$

این در حالی است که برای رادار PR، متوسط $SCNR$ با فرض آنکه سیگنال یکی از زیرآرایه‌ها مثل زیرآرایه دلخواه m را استفاده می‌کند برابر خواهد بود با

$$\overline{SCNR}_{PR} = p_{\max} \int \frac{\beta_{\max}}{\gamma \sigma_m^2} e^{-\frac{\beta_{\max}}{\gamma \sigma_m^2}} d\beta_{\max} =$$

$$\gamma p_{\max} \sigma_{t,m}^2 \sum_{c_n, m}^{-1} z_m^H z_m$$



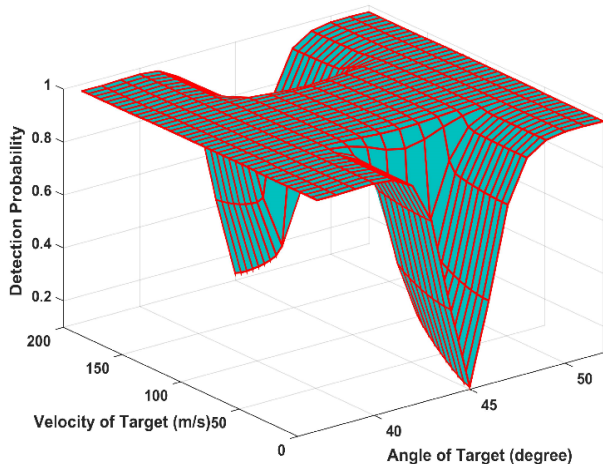
شکل ۴: مقایسه احتمال آشکارسازی تئوری با شبیه‌سازی با فرض $\theta_c = 40^\circ$ و $P_{fa}^{(th)} = 0.1$.

جدول ۱: مشخصات راداری PMR.

$K = 4$	تعداد زیرآرایه‌ها
$M = 30$	تعداد آنتن آرایه فرستنده
$N = 30$	تعداد آنتن آرایه گیرنده
$P_{\max} = 120 \text{ KW}$	حداکثر توان ارسالی فرستنده
$PRF = 4 \text{ KHz}$	فرکانس تکرار پالس
$f_c = 30 \text{ GHz}$	فرکانس مرکزی حامل
$\theta_c = 45^\circ$	زاویه کلانتر
$B_c = 5 \text{ MHz}$	پهنای باند کلانتر
$W = 300 \text{ MHz}$	پهنای باند در دسترس رادار
$R_t = R_r = 10 \text{ Km}$	فاصله هدف تا فرستنده (گیرنده)
$L = 10 \text{ dB}$	تلفات رادار
۰٫۲ ، ۰٫۴ ، ۰٫۸ ، ۱	واریانس بازگشتی‌های هدف
۰٫۵ ، ۱ ، ۱٫۵ ، ۲	واریانس بازگشتی‌های کلانتر
$CNR = 20 \text{ dB}$	نسبت کلانتر به نویز

متأسفانه مشابه \overline{SCNR}_{PR} نمی‌توان با کمک (۴۳) یک فرم بسته برای \overline{SCNR}_{PMR} استخراج کرد؛ بلکه باید به‌صورت عددی مورد محاسبه قرار گیرد. با وجود این در پیوست ج اثبات می‌شود $\overline{SCNR}_{PR} \leq \overline{SCNR}_{PMR}$ همواره برقرار است. همچنین در پیوست ج نشان داده شده که در این وضعیت با افزایش تعداد زیرآرایه‌های K می‌توان به \overline{SCNR}_{PMR} بزرگ‌تری دست یافت. به عبارتی دیگر، این بدان معنا خواهد بود که با افزایش چندگانگی شکل موج می‌توان به بهره عملکرد آشکارسازی بهتری در رادار PMR دست یافت. البته با توجه به پهنای باند رادار و لزوم حداقل

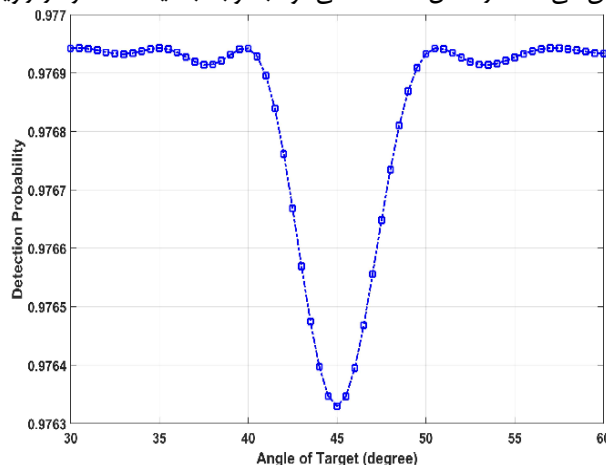
برحسب تغییرات سرعت داپلر هدف مورد بررسی قرار داد. همان طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، در سرعت‌های نزدیک به صفر که معادل با فرکانس‌های داپلر نزدیک به صفر است و از آنجا که کلاتر در نزدیکی فرکانس صفر دارای چگالی توان بسیار بالایی می‌باشد، هر قدر زاویه هدف θ به زاویه کلاتر θ_c نزدیک‌تر شود، در دو بعد فضا و زمان به صورت توأم نال ایجاد می‌گردد. همان طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود در زاویه $\theta = 45^\circ$ ، عمق نال در حوالی فرکانس صفر نسبت به زوایای دیگر بسیار بیشتر بوده و حدود $P_{fa}^{(th)} = 0.1$ می‌باشد. این در حالی است که احتمال آشکارسازی با ۲ درجه کمتر یعنی در زاویه $\theta = 43^\circ$ در حدود ۰/۸ می‌باشد. شکل ۶ تصویر دوبعدی اثر فیلتر فضا-زمان توأم را بهتر نشان می‌دهد.



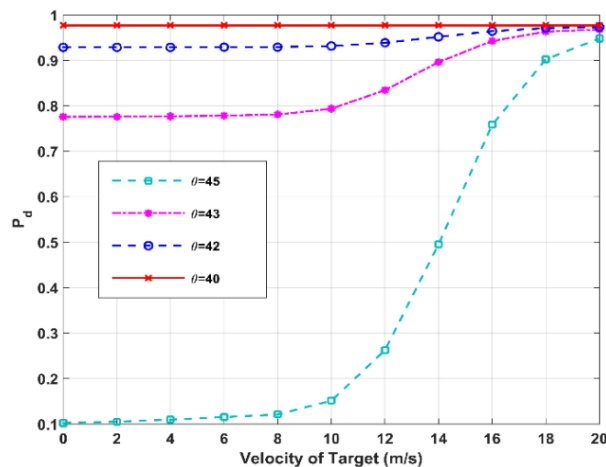
شکل ۶: تغییرات احتمال آشکارسازی بر حسب تغییرات سرعت هدف و زاویه هدف.

همان طور که مشاهده می‌شود، در زاویه $\theta = 45^\circ$ و فرکانس داپلر $f_d = 0$ نال بسیار قوی وجود دارد که احتمال آشکارسازی را شدیداً کاهش داده است. نکته بااهمیت دیگر که در شکل مشاهده می‌شود، آن است که در سرعت $v = 200 \text{ m/s}$ نیز نال قوی مشابه با سرعت $v = 0$ وجود دارد. علت این موضوع آن است که فیلتر فضا-زمان در واقع یک فیلتر DLC فضایی-زمانی می‌باشد که علاوه بر نال انداختن در فرکانس صفر، در مضارب صحیح PRF نیز نال می‌اندازد. در ادبیات راداری، سرعت‌های وابسته به این فرکانس‌ها سرعت کور نامیده می‌شود. در اینجا با توجه به آنکه $PRF = 4K$ است، سرعت‌های کور مضربی از $v_{blind} = 200 \text{ m/s}$ هستند. از طرفی، همان طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، عمق نال در سرعت کور $v_{blind} = 200 \text{ m/s}$ در مقایسه با سرعت صفر، کمتر است که علت آن را می‌توان در چندگانگی فرکانسی زیرآرایه‌ها جستجو کرد. در واقع وقتی زیرآرایه‌ها چندگانگی فرکانسی داشته باشند، سرعت کور برای تمام زیرآرایه‌ها دقیقاً 200 m/s نخواهد بود؛ بلکه در این وضعیت، اگرچه سرعت کور هر زیرآرایه به سرعت 200 m/s نزدیک است، ولی قطعاً این وضعیت، مشابه با سرعت صفر نخواهد بود که فرکانس داپلر تمام زیرآرایه‌ها برابر با صفر است. برای درک بهتر موضوع اثر چندگانگی فرکانسی روی آشکارسازی سرعت‌های کور، احتمال آشکارسازی در زاویه $\theta = 45^\circ$ برای رادارهای PR و PMR با هم مقایسه می‌گردد. همان طور که در شکل ۷ و ۸ مشاهده می‌شود در PMR در مضارب بالاتر سرعت کور، عمق نال شروع به کاهش می‌یابد که علت، آن است که در سرعت‌های کور بالاتر، اختلاف فرکانس داپلر در زیرآرایه‌های مختلف نسبت به هم زیاد می‌شوند. در نتیجه، این چندگانگی باعث می‌گردد که در PMR برخلاف PR که تنها یک فرکانس داپلر را از هدف دریافت می‌کند، در اینجا هر زیرآرایه دارای فرکانس داپلر مختص به

گیرنده مقایسه می‌شود. همان طور که مشاهده می‌گردد، نتایج شبیه‌سازی با توجه به تعداد نمونه‌های در نظر گرفته شده در تحقق متغیرهای تصادفی با دقت بسیار خوبی با روابط تئوری مطابقت دارند. برای درک بهتر، جهت مقایسه عملکرد رادارهای PMR و PR، شکل ۳ را در نظر بگیرید. همان طور که مشاهده می‌شود، احتمال آشکارسازی PMR (نمودار آبی) در مقایسه با احتمال آشکارسازی PR (نمودار قرمز) برای احتمال هشدارهای کاذب مختلف، عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد. این عملکرد بهتر در آشکارسازی همان طور که قبلاً بحث شده است، به‌خاطر بهره چندگانگی به‌کارگرفته شده در PMR است. شکل ۴ احتمال آشکارسازی بر پایه تغییرات زاویه هدف را در $P_{fa}^{(th)} = 0.1$ و $SCNR = -10 \text{ dB}$ نشان می‌دهد. در شکل مشاهده می‌شود با توجه به اینکه کلاتر در زاویه



شکل ۴: تغییرات احتمال آشکارسازی بر اساس تغییرات زاویه هدف.

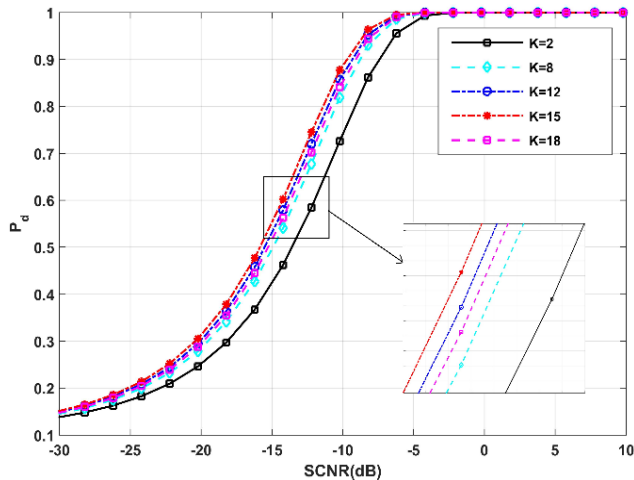


شکل ۵: تغییرات احتمال آشکارسازی بر اساس تغییرات سرعت هدف در زوایای مختلف هدف.

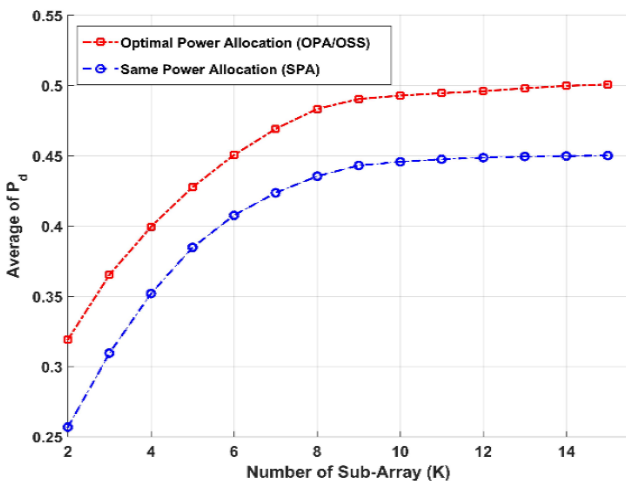
$\theta_c = 45^\circ$ قرار دارد، در زاویه $\theta_c = 45^\circ$ نال بسیار ضعیفی مشاهده می‌شود. آشکارساز بهینه در وضعیت شناخته‌بودن ضریب انعکاس هدف به فرم $\text{Re}\{x_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k\}$ به‌دست آمده که در آن عبارت $x_k^H \sum_{cn,k}^{-1}$ نشان‌دهنده ضرایب فیلتر خطی است که بر روی سیگنال دریافتی خروجی از بانک فیلتری y_k اعمال می‌شود. این فیلتر، یک فیلتر فضا-زمان توأم است و بنابراین در آن با وجود نال انداختن در بعد فضایی، به دلیل اینکه نال در بعد زمان صورت نگرفته است (همان طور که در شکل ۴ مشاهده می‌گردد) عمق نال، بسیار کم است و احتمال آشکارسازی به شکلی ناچیز کم می‌شود.

مشابه شکل ۴، در شکل ۵ نیز می‌توان تغییرات احتمال آشکارسازی را

می‌دهند که برای $K = 18$ ، متوسط احتمال آشکارسازی کاهش می‌یابد. شکل ۱۰، احتمال متوسط آشکارسازی را بر پایه دو طرح تخصیص توان بر حسب تعداد زیرآرایه‌ها نشان می‌دهد. طرح اول، تخصیص بهینه توان (OPA) است و همان طور که پیشتر گفته شد، این طرح معادل با طرح انتخاب زیرآرایه بهینه (OSS) است. همچنین طرح دوم تخصیص یکسان توان (SPA) به تمام زیرآرایه‌ها می‌باشد. همان طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، طرح OSS به‌طور قابل ملاحظه‌ای از طرح SPA عملکرد بهتری دارد. نکته بسیار مهم دیگر که در شکل مشاهده می‌شود آن است که همان طور که پیشتر گفته شد، سرعت افزایش متوسط احتمال آشکارسازی با افزایش تعداد زیرآرایه‌ها شروع به کاهش می‌کند؛ ولی همان طور که گفته شد بدین معنا نخواهد بود که احتمال آشکارسازی



شکل ۹: بررسی اثر بهره چندگانگی بر روی متوسط احتمال آشکارسازی در $\theta = 45^\circ$ و $v = 100 \text{ m/s}$.



شکل ۱۰: مقایسه متوسط احتمال آشکارسازی بر پایه طرح‌های تخصیص توان OSS با SPA در رادار PMR با $SCNR = -30 \text{ dB}$.

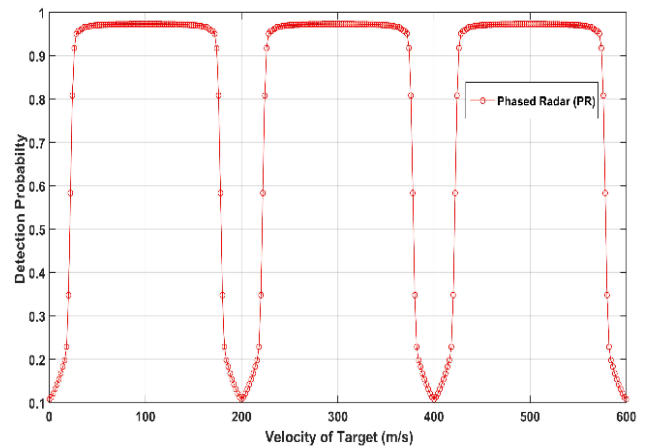
به ازای یک SCNR با افزایش تعداد زیرآرایه‌ها به یک مقدار مشخص همگرا می‌شود. بلکه همان طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، تنها محدودیت عملی باعث توقف در افزایش متوسط احتمال آشکارسازی بر حسب افزایش تعداد زیرآرایه‌ها خواهد شد.

۶- نتیجه‌گیری

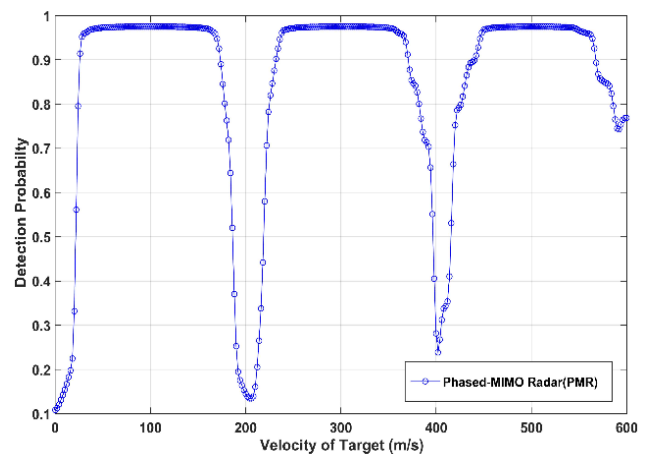
در این مقاله، ابتدا به موضوع طراحی آشکارساز بهینه برای رادارهای PMR در حضور کلاتر با فرض شناخت ضریب انعکاس هدف پرداخته شد و سپس بر پایه آشکارسازهای استخراج‌شده، فرمول احتمال آشکارسازی

خود باشد که این فرکانس‌های دابلر در سرعت‌های کور بالاتر، بیشتر از هم فاصله گرفته و در نتیجه برخلاف شکل ۷ که در تمام سرعت‌های کور، عمق نال‌ها یکسان هستند، در PMRها در سرعت کورهای مختلف، عمق نال‌های متفاوت وجود دارد که باعث کاهش عمق نال در سرعت‌های بالا و بهبود احتمال آشکارسازی می‌گردد.

شکل ۹، متوسط احتمال آشکارسازی را بر حسب تعداد زیرآرایه‌های مختلف نشان می‌دهد. در این طرح فرض شده که توان تخصیص داده شده به هر یک از زیرآرایه‌ها با هم یکسان و برابر با P_{\max}/K است. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش چندگانگی (افزایش تعداد زیرآرایه‌ها)، متوسط احتمال آشکارسازی افزایش می‌یابد. اگرچه میزان افزایش در تعداد زیرآرایه‌های بیشتر، کوچک‌تر از تعداد زیرآرایه‌های



شکل ۷: احتمال آشکارسازی در PR بر حسب تغییرات سرعت هدف.



شکل ۸: تغییرات احتمال آشکارسازی در PMR بر حسب تغییرات سرعت هدف.

کمتر است ولی این افزایش را تا $K = 15$ مشاهده می‌کنیم. این در حالی است که در $K = 18$ که با نمودار صورتی‌رنگ در شکل ۹ مشخص شده، متوسط احتمال آشکارسازی در مقایسه با $K = 15$ افت پیدا می‌کند. علت این کاهش به‌خاطر محدودیت در داشتن زیرآرایه‌هایی با چندگانگی مستقل می‌باشد. در واقع در اینجا فرض شده که طول هدف $l = 15 \text{ m}$ و زاویه‌ای که با رادار می‌سازد، تقریباً برابر با $\sin \theta = 0.5$ است؛ بنابراین $\Delta f_{\min} = 20 \text{ MHz}$ خواهد بود. لذا حداکثر تعداد زیرآرایه‌ها با استقلال در ضرایب بازگشتی دریافتی از هدف برابر خواهد بود با $w/\Delta f_{\min} = 15$. بنابراین در شبیه‌سازی انجام‌شده در شکل ۹ برای $K > 15$ ، بین ضرایب بازگشتی β_k ها با توجه به اینکه به‌صورت یک متغیر تصادفی گوسی مختلط مدل شده‌اند، ضریب همبستگی $\rho = 0.3$ بین آنها در نظر گرفته شده است. همان طور که مشاهده می‌گردد، نتایج شبیه‌سازی نشان

$$L(p_k, v, \theta_k) = -\sum_{k=1}^K \gamma_k p_k + v(\sum_{k=1}^K p_k - P_{\max}) - \sum_{k=1}^K \theta_k p_k \quad (۵-پ)$$

که θ_k ها و v ضرایب لاگرانژ نامنفی مربوط به قیود مسئله هستند. برای محاسبه جواب بهینه از تابع لاگرانژ نسبت به p_k ها مشتق گرفته می‌شود

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = -\gamma_k + v - \theta_k = 0, \quad \forall k \quad (۶-پ)$$

همچنین معادلات KKT را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$v(\sum_{k=1}^K p_k - P_{\max}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v > 0, & \sum_{k=1}^K p_k = P_{\max} \\ v = 0, & \sum_{k=1}^K p_k < P_{\max} \end{cases} \quad (۷-پ)$$

$$\theta_k p_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_k > 0, & p_k = 0 \\ \theta_k = 0, & p_k > 0 \end{cases} \quad (۸-پ)$$

در (۶-پ) پرواضح است که با توجه به نامنفی بودن γ_k ها و θ_k ها، تنها زمانی در تساوی برقرار است که $v \neq 0$ باشد که با توجه به (۷-پ) به این معنا خواهد بود که جواب بهینه مسئله، در معادله $\sum_{k=1}^K p_k = P_{\max}$ صدق می‌کند. همچنین با توجه به آنکه γ_k ها به ازای k های مختلف با هم متفاوت هستند، برای تمام k ها نمی‌تواند معادله $-\gamma_k + v = 0$ برقرار باشد. از طرفی حداقل برای یک اندیس k شرایط $\theta_k = 0$ برقرار است؛ زیرا اگر این شرایط وجود نداشته باشد، مطابق با (۸-پ) بدین معناست که برای تمام k ها، $p_k = 0$ می‌باشد که این با $v \neq 0$ در تناقض است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که یک و تنها یک اندیس k وجود دارد که در آن $p_k \neq 0$ است و با توجه به شرایط بهینه $\sum_{k=1}^K p_k = P_{\max}$

می‌توان نتیجه گرفت برای آن k ، $p_k = P_{\max}$ می‌باشد. اما پرسش این است که کدام شماره k باید توان پیک رادار اختصاص یابد. از تابع هدف $\sum_{k=1}^K \gamma_k p_k = \gamma_k P_{\max}$ پرواضح است اگر توان پیک رادار به اندیس k که γ_k بزرگ‌تر دارد اختصاص داده شود، مقدار بزرگ‌تری برای تابع هدف حاصل می‌شود که جواب مطلوب‌تری است. این موضوع را از لحاظ ریاضی نیز می‌توان اثبات کرد (فرض خلف). فرض می‌شود برای یک اندیس m که γ_m آن بزرگ‌ترین نیست $p_m = P_{\max}$ باشد؛ در این صورت به ازای آن اندیس، $-\gamma_m + v = 0$ است و این با معادله $-\gamma_m + v - \theta_k = 0$ که به ازای اندیس k مقدار γ_k بزرگ‌تری دارد در تناقض است؛ چون $-\gamma_m + v = 0 < -\gamma_k + v - \theta_k < -\gamma_k + v = 0$ در این حالت (۶-پ) نقض خواهد شد که امکان ناپذیر است؛ پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

پیوست ج

این پیوست به بررسی $\overline{SCNR}_{PR} \leq \overline{SCNR}_{PMR}$ می‌پردازد و نشان می‌دهد برای هر دسته تابع دلخواه محدب $\{g_i(x)\}$ می‌توان ثابت کرد $g(x) = \max_i \{g_i(x)\}$ تابعی محدب است. بدین منظور فرض می‌شود $0 \leq t \leq 1$ و $x, y \in R$ هستند که در آن R دامنه مشترک قابل تعریف تمام g_i ها می‌باشد. بنابراین

$$g_i(tx + (1-t)y) \leq tg_i(x) + (1-t)g_i(y) \quad (۹-پ)$$

$$\max_i \{g_i(tx + (1-t)y)\} \leq \max_i \{tg_i(x) + (1-t)g_i(y)\} \quad (۱۰-پ)$$

از طرفی

و احتمال هشدار کاذب محاسبه گردید. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که فرمول بسته ارائه شده برای احتمال آشکارسازی با نتایج شبیه‌سازی مونت کارلوی آشکارساز مطابقت دارد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که چندگانگی فرکانسی باعث بهبود عملکرد رادار مخصوصاً در سرعت‌های کور می‌شود. همچنین این مقاله نشان داده که مسأله تخصیص بهینه توان به مسأله انتخاب زیرآرایه بهینه منجر می‌شود. علاوه بر این، آنالیز ریاضی بهره چندگانگی انجام شده نشان می‌دهد به لحاظ پیاده‌سازی عملیاتی دارای محدودیت‌هایی هست، به طوری که نتایج شبیه‌سازی عددی، کاهش عملکرد آشکارسازی سیستم PMR را در وضعیت محدودیت‌های عملی به هنگام افزایش چندگانگی نشان می‌دهند.

پیوست

پیوست الف

در (۳۲) پرواضح است که y_k یک بردار متغیر تصادفی گوسی مختلط می‌باشد که عناصر این بردار به هم وابسته هستند. از طرفی تحت هر نگاشت مستوی^۱ برای هر بردار گوسی مختلط، دوباره بردار گوسی مختلط حاصل می‌شود. از آنجایی که $r_k^H \sum_{cn,k}^{-1}$ یک بردار می‌باشد، حاصل $r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k$ یا به عبارتی T یک اسکالر گوسی مختلط خواهد بود. تحت فرضیه H_0 ، y_k بردار گوسی مختلط با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\sum_{cn,k}$ می‌باشد و در این صورت میانگین T برابر است با

$$E\{T|H_0\} = 0 \quad (۱-پ)$$

از آنجا که y_k یک بردار گوسی مختلط دارای خاصیت شایسته^۲ است، واریانس قسمت حقیقی $r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k$ ، نصف واریانس متغیر تصادفی $x_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k$ می‌باشد؛ یعنی

$$\text{var}\{T|H_0\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K E\{r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} y_k y_k^H \sum_{cn,k}^{-H} r_k\} \quad (۲-پ)$$

نیز با توجه به اینکه $E\{y_k y_k^H | H_0\} = \sum_{cn,k}$ و $(\sum_{cn,k}^{-1})^H = \sum_{cn,k}^{-1}$ است، بنابراین

$$\text{var}\{T|H_0\} = \sigma_{cn}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k \quad (۳-پ)$$

به طور مشابه برای فرضیه H_1 ، y_k یک بردار تصادفی گوسی مختلط با ماتریس کوواریانس $\sum_{cn,k}$ و میانگین r_k است؛ پس T متغیری گوسی با واریانس σ_{cn}^2 و میانگین A خواهد بود که

$$A = \sum_{k=1}^K \text{Re}\{r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k\} = \sum_{k=1}^K r_k^H \sum_{cn,k}^{-1} r_k \quad (۴-پ)$$

رابطه اخیر با توجه به (۱۵) که ماتریس $\sum_{cn,k}$ ، یک ماتریس معین مثبت با تقارن هرمیتی می‌باشد به دست آمده است.

پیوست ب

برای اثبات لم ۱ و حل مسأله بهینه‌سازی تخصیص توان P_V ، در ابتدا تابع لاگرانژ تشکیل می‌شود [۱۷]

1. Affine
2. Proper

مراجع

- [1] E. Brookner, "Phased array radars-past, present and future," in *Proc. RADAR'02*, pp. 104-113, Edinburgh, UK, 15-17 Oct. 2002.
- [2] J. Li and P. Stoica, "MIMO radar with colocated antennas," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 5, pp. 106-114, Sep. 2007.
- [3] E. Fishler, A. Haimovich, R. S. Blum, L. J. Cimini, D. Chizhik, and R. A. Valenzuela, "Spatial diversity in radars-models and detection performance," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 823-838, Mar. 2006.
- [4] J. Li and P. Stoica, *MIMO Radar Signal Processing*, New York: Wiley, vol. 7, 2009.
- [5] A. Hassanien and S. A. Vorobyov, "Phased-MIMO radar: a tradeoff between phased-array and MIMO radars," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 58, no. 6, pp. 3137-3151, Jun. 2010.
- [6] M. Jankiraman, *FMCW Radar Design*, Artech House, 2018.
- [7] Q. He, N. H. Lehmann, R. S. Blum, and A. M. Haimovich, "MIMO radar moving target detection in homogeneous clutter," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 46, no. 3, pp. 1290-1301, Jul. 2010.
- [8] T. Zhang, G. Cui, L. Kong, and X. Yang, "Adaptive bayesian detection using MIMO radar in spatially heterogeneous clutter," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 6, pp. 547-550, Jun. 2013.
- [9] M. Ahmadi and K. Mohamedpour, "Space-time adaptive processing for phased-multiple-input-multiple-output radar in the non-homogeneous clutter environment," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 8, no. 6, pp. 585-596, Jul. 2014.
- [10] X. Yu, G. Cui, J. Yang, and L. Kong, "MIMO radar transmit-receive design for moving target detection in signal-dependent clutter," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 1, pp. 522-536, Jan. 2020.
- [11] A. J. Bogush, "Correlated clutter and resultant properties of binary signals," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 208-213, Mar. 1973.
- [12] K. Schacke, *On the Kronecker Product*, Master's Thesis, University of Waterloo, 2004.
- [13] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Pt. I*, New York: Wiley, 1968.
- [14] M. J. Ghoreishian, S. M. Hosseini Andargoli, and F. Parvari, "Power allocation in MIMO radars based on LPI optimisation and detection performance fulfilment," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 14, no. 6, pp. 822-832, 2020.
- [15] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, New York, McGraw-Hill, vol. 4, 2001.
- [16] F. E. Nathanson, J. P. Reilly, and M. N. Cohen, *Radar Design Principles: Signal Processing and the Environment*, NASA STI/Recon Technical Report A, USA, 1991.
- [17] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

حمیدرضا فتوحی فیروزآباد تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی مهندسی برق (الکترونیک) در سال ۱۳۸۳ از دانشگاه یزد، در مقطع کارشناسی ارشد مهندسی برق (مخابرات) در سال ۱۳۹۳ از موسسه آموزش عالی خاوران مشهد و در مقطع دکتری مهندسی برق (مخابرات سیستم) در سال ۱۴۰۰ از دانشگاه یزد به پایان رسانده است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: پردازش سیگنال‌های راداری و مخابرات بی‌سیم.

سیدمهدی حسینی اندارگلی تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی مهندسی برق (الکترونیک) در سال ۱۳۸۳ از دانشگاه شاهد تهران، و در مقطع کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی برق (مخابرات سیستم) به ترتیب در سالهای ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی به پایان رسانده است و هم‌اکنون دانشیار گروه مخابرات دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: مخابرات بی‌سیم، شبکه حسگر بی‌سیم، بهینه‌سازی محدب، پردازش راداری و کاربرد هوش مصنوعی در پردازش سیگنال.

حسین قانع‌ی یخدان تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی مهندسی برق (الکترونیک) در سال ۱۳۶۷ از دانشگاه صنعتی اصفهان، در مقطع کارشناسی ارشد مهندسی برق (مخابرات سیستم) در سال ۱۳۷۱ از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و در مقطع دکتری مهندسی برق (مخابرات سیستم) در سال ۱۳۸۸ از دانشگاه فردوسی مشهد به پایان رسانده است و هم‌اکنون دانشیار دانشکده مهندسی برق دانشگاه یزد می‌باشد.

$$\max_i \{tg_i(x) + (1-t)g_i(y)\} \leq t \max_i \{g_i(x)\} + (1-t) \max_i \{g_i(y)\} \quad (پ-۱۱)$$

با مقایسه (پ-۱۰) و (پ-۱۱) به دست می‌آید

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \quad (پ-۱۲)$$

و اثبات شد $g(x)$ تابع محدب است. با کمک (پ-۱۲) و نامساوی جنسن^۱

$$E\{\max_{\{k\}} \{|\beta_k|^r z_k^H \sum_{cn,k}^{-1} z_k\}\} \geq \max_{\{k\}} \{E\{|\beta_k|^r\} z_k^H \sum_{cn,k}^{-1} z_k\} \Rightarrow E\{\max_{\{k\}} \{|\beta_k|^r z_k^H \sum_{cn,k}^{-1} z_k\}\} \geq \max_{\{k\}} \{r \sigma_{t,k}^r z_k^H \sum_{cn,k}^{-1} z_k\} \quad (پ-۱۳)$$

از (پ-۱۳) به راحتی می‌توان دریافت که $\overline{SCNR}_{PR} \leq \overline{SCNR}_{PMR}$ ؛ لذا می‌توان دریافت که در (پ-۱۳) با افزایش تعداد زیرآرایه‌ها، تعداد متنوعی از $\sigma_{t,k}^r$ در اختیار خواهد بود و بنابراین متوسط سیگنال به کلاتر به نوبت بزرگ‌تر خواهد شد. حال اگر فرض شود متوسط نسبت سیگنال به کلاتر به اضافه نوبت برای تمام زیرآرایه‌ها یکسان است، ضعیف‌ترین چندگانگی ممکن بین زیرآرایه‌ها برقرار می‌باشد. در این وضعیت، تابع چگالی احتمال β_{\max} در (۴۱) برابر خواهد بود با

$$f_{\beta_{\max}}(\beta_{\max}) = \frac{K}{r \sigma_m^r} e^{-\frac{\beta_{\max}}{r \sigma_m^r}} (1 - e^{-\frac{\beta_{\max}}{r \sigma_m^r}})^{k-1} \quad (پ-۱۴)$$

با جایگذاری در (پ-۱۴) به دست می‌آید

$$\overline{SCNR}_{PMR} = \int_0^{\infty} \frac{K p_{\max} \beta_{\max}}{r \sigma_m^r} e^{-\frac{\beta_{\max}}{r \sigma_m^r}} (1 - e^{-\frac{\beta_{\max}}{r \sigma_m^r}})^{k-1} d\beta_{\max} \quad (پ-۱۵)$$

به راحتی می‌توان (پ-۱۵) را به صورت زیر نوشت

$$\overline{SCNR}_{PMR} = -p_{\max} \sigma_m^r \frac{\partial}{\partial \sigma_m^r} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\frac{\beta_{\max}}{r \sigma_m^r}})^k d\beta_{\max} \quad (پ-۱۶)$$

حال با یک تغییر متغیر $t = e^{-\frac{\beta_{\max}}{r \sigma_m^r}}$ می‌توان (پ-۱۶) را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\overline{SCNR}_{PMR} = -p_{\max} \sigma_m^r \frac{\partial}{\partial \sigma_m^r} (-r \sigma_m^r \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{t} dt) \quad (پ-۱۷)$$

عبارت $\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{t} dt$ یک انتگرال عددی فاقد σ_m^r است و بنابراین با مشتق‌گیری نسبت به σ_m^r و سپس استفاده از بسط $(1-t)^k$ ، (پ-۱۷) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\overline{SCNR}_{PMR} = r p_{\max} \sigma_m^r \sum_{k=1}^k \frac{1}{k} \quad (پ-۱۸)$$

با توجه به آنکه $\overline{SCNR}_{PR} = r p_{\max} \sigma_m^r$ است، نسبت متوسط سیگنال به نوبت به کلاتر در PMR به PR برابر است با

$$10 \log_{10} \frac{\overline{SCNR}_{PMR}}{\overline{SCNR}_{PR}} = 10 \log_{10} \sum_{k=1}^k \frac{1}{k} \quad (پ-۱۹)$$

زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: پردازش تصویر و ویدئوی دیجیتال، ردگیری هدف و شبکه‌های عصبی عمیق.

جمشید ابویی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برق (مخابرات) به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۷۲ و ۱۳۷۵ از دانشگاه صنعتی اصفهان و در مقطع دکتری مهندسی برق (مخابرات) در سال ۱۳۸۸ از دانشگاه واترلوو کانادا به پایان رسانده است و هم‌اکنون دانشیار دانشکده مهندسی برق دانشگاه یزد می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: شبکه‌های حسگر بی‌سیم، مخابرات بی‌سیم و تخصیص منابع در سیستم‌های آنتن‌های انبوه.