

# تخمین حالت سیستم‌های غیر خطی با استفاده از فیلتر کالمن مکعبی جمع گوسی بر اساس قانون شعاعی- کروری سیمپلکس

محمدامین احمدپور کاخک و بهروز صفری نژادیان

و کالمن توسعه یافته<sup>۱</sup> [۵] به ترتیب برای سیستم‌های خطی و غیر خطی استفاده شده‌اند. فیلتر کالمن توسعه یافته از خطی سازی توابع غیر خطی به وسیله بسط تیلور مرتبه اول استفاده کرده و بنابراین خطای خطی سازی ناشی از آن موجب ایجاد بایاس در تخمین‌های صورت گرفته می‌شود و کاربرد آن را علی‌الخصوص برای سیستم‌های با معادلات شدیداً غیر خطی محدود می‌سازد. در [۶] فیلتر دیگری تحت عنوان فیلتر Divided Difference ارائه شده که تقریب تابع غیر خطی را با استفاده از درون‌یاب چندجمله‌ای استرلینگ<sup>۲</sup> انجام می‌دهد و نشان داده شده که تقریب‌های مرتبه بالاتر آن می‌تواند به دقت تخمین مناسب‌تری از فیلتر کالمن توسعه یافته دست یابد.

فیلتر کالمن خنثی<sup>۳</sup> [۷] و فیلتر گوس-هرمیت [۸] نمونه‌های دیگری از فیلترهای غیر خطی هستند که بر مبنای انتشار نقاط نمونه وزن دار معین<sup>۴</sup> در توابع غیر خطی و تقریب آنها کار می‌کنند. در میان این دسته از فیلترها، فیلتر کالمن خنثی به علت مصالحه مناسب بین دقت تخمین‌های صورت گرفته و بار محاسباتی، توجه محققین بیشتری را به خود معطوف نموده است.

به عنوان یکی از جدیدترین فیلترهای غیر خطی، در [۹] فیلتر کالمن مکعبی<sup>۵</sup> برای تخمین حالات سیستم‌های با ابعاد بالا معرفی شده است. این فیلتر بر اساس قانون مکعبی درجه سه و انتشار نقاط وزن دار تابع غیر خطی استوار است. نویسندگان این مقاله اظهار کرده‌اند که قانون مکعبی درجه سه، شکل خاصی از تبدیل خنثی<sup>۶</sup> به کار رفته در فیلتر کالمن خنثی است که مشکلات پایداری عددی آن را نیز مرتفع می‌نماید. نسخه‌ای از این فیلتر برای استفاده در سیستم‌های ترکیبی پیوسته-گسسته در [۱۰] ارائه گردیده و همچنین نسخه هموار ساز آن در [۱۱] معرفی شده است. در [۱۲] کلاس جدیدی از فیلترهای کالمن مکعبی ارائه شده که مبتنی بر قوانین مکعبی با درجات بالاتر از سه هستند. در این مقاله نشان داده شده که استفاده از قوانین درجه پنج مکعبی، تعادل مناسبی بین دقت تخمین و میزان بار محاسباتی تحمیلی برقرار می‌سازد. به منظور توسعه فیلترهای کالمن مکعبی درجه بالاتر، در [۱۳] نقاط و وزن‌های متناظر برای فیلتر کالمن مکعبی درجه هفت محاسبه شده‌اند و شبیه‌سازی صورت گرفته برای ردیابی هدف مانوردار نشان از افزایش دقت تخمین‌های صورت گرفته توسط این فیلتر در برخی کاربردها دارد. در [۱۴]

چکیده: در این مقاله الگوریتم جدیدی از فیلترهای جمع گوسی برای تخمین حالت سیستم‌های غیر خطی ارائه شده است. روش پیشنهادی شامل اجرای چند فیلتر کالمن مکعبی به شکل موازی است به صورتی که هر کدام از این فیلترها بر اساس قوانین شعاعی- کروری سیمپلکس پیاده‌سازی می‌شوند. در این روش تابع چگالی احتمال حالت به صورت مجموع وزنی از چند تابع گوسی است که مقادیر میانگین، کواریانس و همچنین ضرایب وزنی این توابع گوسی به صورت بازگشتی و در طول زمان محاسبه می‌شوند و هر کدام از فیلترهای کالمن مکعبی نیز مسئول به روز رسانی یکی از این توابع هستند. در نهایت عملکرد فیلتر پیشنهادی با استفاده از دو مسأله تخمین حالت غیر خطی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آن با فیلترهای غیر خطی مرسوم مقایسه می‌شود. شبیه‌سازی‌های صورت گرفته نشان از دقت مناسب الگوریتم پیشنهادی در تخمین حالت سیستم‌های غیر خطی دارد.

کلیدواژه: سیستم‌های غیر خطی، تخمین حالت، قانون مکعبی سیمپلکس، فیلتر جمع گوسی.

## ۱- مقدمه

تا به امروز پژوهشگران تلاش‌های قابل توجه و مهمی را برای توسعه روش‌ها و الگوریتم‌های تخمین برای سیستم‌های غیر خطی انجام داده‌اند. علت چنین توجهی را می‌توان در کاربردهای آن در جهان واقعی جست‌وجو کرد. در بسیاری از این کاربردها نیاز است که حالت‌های سیستم با استفاده از اندازه‌گیری‌های آغشته به نویز تخمین زده شوند که از جمله آنها می‌توان به مکان‌یابی و ردیابی اهداف [۱]، ناوبری [۲] و کنترل فرایندهای شیمیایی [۳] اشاره نمود.

عموماً روش‌های تخمین بر مبنای مدل دینامیکی و مدل سازی فضای حالت سیستم‌ها عمل می‌کنند. مسأله تخمین حالت به وسیله روش‌های فیلترینگ می‌تواند به شکل گسسته- زمان، پیوسته- زمان و یا به صورت ترکیبی از معادلات پیوسته- زمان و گسسته- زمان صورت پذیرد. مرسوم‌ترین شکل برای تخمین حالت سیستم‌ها استفاده از معادله (معادلات) گسسته- زمان فرایند و معادله (معادلات) گسسته- زمان اندازه‌گیری است. بدین منظور برای سال‌های بسیاری و به عنوان اولین تلاش‌ها برای تخمین حالات سیستم‌های دینامیکی، فیلترهای کالمن [۴]

این مقاله در تاریخ ۱۰ اسفند ماه ۱۳۹۸ دریافت و در تاریخ ۸ تیر ماه ۱۴۰۰ بازنگری شد.

محمدامین احمدپور کاخک، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران، (email: en.a.ahmadpour@gmail.com)  
بهروز صفری نژادیان (نویسنده مسئول)، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران، (email: safarinejad@sutech.ac.ir).

1. Extended Kalman Filter
2. Stirling
3. Unscented Kalman Filter
4. Deterministic Weighted Sample Points
5. Cubature Kalman Filter
6. Unscented Transform

$$y_k = h(x_k) + w_k \quad (2)$$

به طوری که  $x_k \in \mathbb{R}^n$  نشان‌دهنده حالت سیستم،  $y_k \in \mathbb{R}^m$  بردار اندازه‌گیری‌ها و  $k$  گام نمونه‌برداری است.  $w_k$  و  $v_{k-1}$  نیز نویزهای اندازه‌گیری و فرایند بوده که گوسی، سفید و ناهمبسته فرض می‌شوند و به ترتیب دارای ماتریس‌های کواریانس  $R_k$  و  $Q_{k-1}$  می‌باشند. ساختار فیلترینگ بیزین برای سیستم‌های خطی گسسته-زمان دارای دو مرحله پیش‌بینی و به روز رسانی است که توابع چگالی احتمال پیشین و پسین به وسیله معادلات چپمن-کولموگروف<sup>۴</sup> و قاعده بیز به صورت (۳) و (۴) قابل محاسبه هستند

$$p(x_k | y_{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | y_{k-1}) dx_{k-1} \quad (3)$$

$$p(x_k | y_k) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | y_{k-1})}{\int (y_k | x_k) p(x_k | y_{k-1}) dx_k} \quad (4)$$

در حالتی که معادلات فرایند یا اندازه‌گیری غیر خطی هستند، انتگرال‌های چندگانه (۳) و (۴) که به صورت حاصل ضرب توابع غیر خطی در توابع چگالی احتمال هستند به شکل تحلیلی قابل حل نبوده [۵] و بنابراین در حالت غیر خطی نیازمند فیلترهای زیربینه<sup>۵</sup> به منظور تقریب روابط هستیم. با فرض گوسی بودن نویزهای فرایند و اندازه‌گیری، توابع چگالی احتمال حالت‌های سیستم در فیلترهای تقریبی غیر خطی نیز گوسی بوده و فقط میانگین و کواریانس حالت‌های سیستم نیازمند محاسبه در هر گام هستند [۱۶]. انتگرال‌های وزن دار گوسی بیان شده می‌تواند به وسیله هر کدام از قوانین تربیع<sup>۶</sup> ارائه شده نظیر تبدیل خنثی [۷] یا قانون مکعبی [۹] تقریب زده شده و بر این اساس فیلترهای تقریبی گوسی جدیدی برای تخمین حالات سیستم‌های غیر خطی معرفی می‌شوند. فیلترهای تقریبی گوسی برای تخمین حالات سیستم‌های غیر خطی به صورت خلاصه با (۵) تا (۱۵) بیان می‌شوند [۸] و [۲۲].

#### مرحله پیش‌بینی

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{n_p} W_i f(\varepsilon_i) \quad (5)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{n_p} W_i (f(\varepsilon_i) - \hat{x}_{k|k-1})(f(\varepsilon_i) - \hat{x}_{k|k-1})^T + Q_{k-1} \quad (6)$$

که در (۵) و (۶)،  $n_p$  تعداد نقاط و  $\varepsilon_i$  نقاط تبدیل یافته بوده که با استفاده از تجزیه کواریانس محاسبه می‌شوند و  $W_i$  وزن‌های این نقاط هستند

$$P_{k-1|k-1} = SS^T \quad (7)$$

$$\varepsilon_i = S\mu_i + \hat{x}_{k-1|k-1}$$

که  $\mu_i$  نشان‌دهنده نقاط تربیع است و همان طور که بیان شد از روش‌های مختلفی نظیر تبدیل خنثی به دست آورده می‌شوند.

#### مرحله به روز رسانی

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k (y_k - z_k) \quad (8)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} + L_k P_{xz}^T \quad (9)$$

$$L_k = P_{k|k-1} (R_k + P_{zz})^{-1} \quad (10)$$

کلاس جدیدی از فیلترهای مکعبی ارائه شده که نقاط و وزن‌های فیلترهای کالمن مکعبی با استفاده از قوانین مکعبی سیمپلکس<sup>۱</sup> توسعه پیدا کرده‌اند. مقایسه‌های انجام شده حاکی از افزایش دقت تخمین‌های صورت گرفته دارد.

در نوع دیگری از فیلترهای غیر خطی که با نام فیلتر ذره‌ای [۱۵] شناخته می‌شوند، اساس کار، شبیه‌سازی مکرر بردار حالت و نمونه‌برداری از آن به تعداد دفعات زیاد است. در این روش به منظور به دست آوردن دقت بیشتر، نیاز است که تعداد نمونه‌ها (ذرات) افزایش یابد که انجام محاسبات تعداد زیاد نمونه‌ها برای سیستم‌های با ابعاد بالا، نیاز به محاسبات و صرف زمان زیادی دارد.

در [۱۶] به منظور کاهش خطای خطی سازی فیلتر کالمن توسعه یافته، ساختار جمع گوسی شامل چند فیلتر کالمن توسعه یافته به عنوان یکی از روش‌های مرتبه بالا به تفصیل توضیح داده شده است. ایده اصلی استفاده از این ساختار بر اساس تقریب یک تابع چگالی احتمال غیر گوسی به کمک مجموع چند تابع چگالی گوسی است. نمونه‌هایی از ساختار جمع گوسی برای کاربردهای خاص ردیابی هدف در [۱۷] و [۱۸] توسعه پیدا کرده‌اند و همچنین در [۱۹] ساختار جمع گوسی بر مبنای چند فیلتر کالمن خنثی مرتبه بالا ارائه شده است.

دسته دیگری از فیلترها برای تخمین حالت سیستم‌های پیوسته-زمان مورد استفاده قرار می‌گیرند. در [۲۰] فیلتر کالمن خنثی برای سیستم‌های پیوسته-زمان توسعه پیدا کرده و فیلتر حاصل با نام فیلتر کالمن-بوسی خنثی<sup>۲</sup> شناخته می‌شود. فیلتر مودال-کالمن روش دیگری برای تخمین حالت‌های سیستم‌های پیوسته-زمان است که در [۲۱] ارائه شده است. این فیلتر بر اساس روش سری مودال پیاده‌سازی شده که با استفاده از آن می‌توان مسأله فیلترینگ غیر خطی را به مجموعه‌ای از مسایل فیلترینگ خطی تبدیل کرد و با استفاده از فیلتر کالمن، تخمین بردار حالت هر یک از سیستم‌ها را به دست آورد.

در ادامه ساختار ذیل برای مقاله سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ ساختار فیلترهای تقریبی گوسی مبتنی بر نقاط<sup>۳</sup> بیان می‌شوند. در بخش ۳ قوانین شعاعی-کروی و شعاعی-کروی سیمپلکس معرفی می‌شوند. بخش ۴ شامل ایده اصلی مقاله و الگوریتم پیشنهادی است. در این بخش ابتدا مفهوم فیلتر جمع گوسی بیان شده و سپس بر اساس قانون شعاعی-کروی سیمپلکس، الگوریتم روش پیشنهادی به کمک روابط بخش ۲ و روابط فیلتر جمع گوسی معرفی می‌گردد. در بخش ۵ عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی روی سیستم‌های غیر خطی مورد بررسی قرار گرفته و با روش‌های فیلترینگ مرسوم مقایسه می‌گردد و بخش ۶ و پایانی نیز شامل نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نهایی مقاله است.

## ۲- فیلترهای تقریبی گوسی مبتنی بر نقاط

در این بخش به معرفی و بررسی روابط فیلترهای تقریبی گوسی که بر مبنای انتشار نقاط معین در تابع غیر خطی عمل می‌کنند پرداخته می‌شود. فرض کنیم کلاسی از سیستم‌های غیر خطی گسسته-زمان به صورت

$$x_k = f(x_{k-1}) + v_{k-1} \quad (1)$$

4. Chapman-Kolmogorov  
5. Suboptimal Filters  
6. Quadrature Rules

1. Simplex Cubature Rule  
2. Unscented Kalman-Bucy Filter  
3. Points-Based Gaussian Approximation Filter

که از حل آن، نقاط و وزن‌های قانون شعاعی درجه ۳ به صورت (۲۲) به دست می‌آیند

$$\begin{cases} \omega_{r_i, r_i} = \frac{1}{\nu} \Gamma(\frac{1}{\nu} n) \\ \omega_{r_i, r_i} = \frac{1}{\nu} \Gamma(\frac{1}{\nu} (n+1)) = \frac{n}{\nu} \Gamma(\frac{1}{\nu} n) \end{cases} \quad (21)$$

$$r_i = \sqrt{\frac{n}{\nu}} \quad (22)$$

$$\omega_{r_i, r_i} = \frac{\Gamma(\frac{n}{\nu})}{\nu}$$

برای حل انتگرال کروی (۲۰) و به منظور محاسبه قانون کروی (۲۳) و قانون کروی سیمپلکس (۲۴)، از روش گنز [۲۳] به شکل مرسوم استفاده شده است

$$S_r^{SR}(r) = \frac{A_n}{\nu n} \sum_{j=1}^n [g(e_j) + g(-e_j)] \quad (23)$$

$$S_r^{SSR}(r) = \frac{A_n}{\nu(n+1)} \sum_{j=1}^{n+1} [g(r\alpha_j) + g(-r\alpha_j)] \quad (24)$$

که  $A_n$  مساحت رویه کره‌ای به شعاع واحد و  $e_j$  بردار واحدی است که  $j$  امین عنصر آن یک است. همچنین بردار  $\alpha_j$  در قانون شعاعی-کروی سیمپلکس به صورت  $[a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n}]^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1$  معرفی شده که مقادیر درایه‌های آن از (۲۵) محاسبه می‌شوند [۲۳]

$$\alpha_{j,l} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{n+1}{n(n-l+2)(n-l+1)}} & , l < j \\ \sqrt{\frac{(n+1)(n-j+1)}{n(n-j+2)}} & , l = j \\ 0 & , l > j \end{cases} \quad (25)$$

حال برای محاسبه (۱۶)، با ترکیب قانون شعاعی به ترتیب با قوانین کروی و کروی سیمپلکس، قانون شعاعی-کروی (مکعبی) و قانون شعاعی-کروی سیمپلکس (مکعبی سیمپلکس) به صورت (۲۶) و (۲۷) به دست می‌آیند

$$Q^{SR}(g) = \frac{1}{\nu n} \sum_{j=1}^n [g(\sqrt{n}e_j) + g(-\sqrt{n}e_j)] \quad (26)$$

$$Q^{SSR}(g) = \frac{1}{\nu(n+1)} \sum_{j=1}^{n+1} [g(\sqrt{n}\alpha_j) + g(-\sqrt{n}\alpha_j)] \quad (27)$$

بنابراین قانون شعاعی-کروی سیمپلکس به جای استفاده از  $2n$  نقطه، از  $2n+2$  نقطه مکعبی استفاده کرده و در [۱۴] نشان داده شده که تخمین‌های به دست آمده با استفاده از انتشار این نقاط می‌تواند به دقت بالاتری دست یابد. نقاط مکعبی به دست آمده بر اساس قوانین شعاعی-کروی و شعاعی-کروی سیمپلکس (درجه ۳) برای یک سیستم دوعبده به همراه وزن‌هایشان در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند.

$$z_k = \sum_{i=1}^{n_p} W_i h(\tilde{\epsilon}_i) \quad (11)$$

$$P_{xz} = \sum_{i=1}^{n_p} W_i (\tilde{\epsilon}_i - \hat{x}_{k|k-1})(h(\tilde{\epsilon}_i) - z_k)^T \quad (12)$$

$$P_{zz} = \sum_{i=1}^{n_p} W_i (h(\tilde{\epsilon}_i) - z_k)(h(\tilde{\epsilon}_i) - z_k)^T \quad (13)$$

در (۱۱) تا (۱۳)،  $\tilde{\epsilon}_i$  نقاط تبدیل یافته جدید بوده که از تجزیه کواریانس پیش‌بینی محاسبه می‌شوند

$$P_{k|k-1} = \tilde{S}\tilde{S}^T \quad (14)$$

$$\tilde{\epsilon}_i = \tilde{S}\mu_i + \hat{x}_{k|k-1}$$

در این مقاله نقاط تربیع به وسیله قانون شعاعی-کروی سیمپلکس محاسبه می‌شوند که در بخش ۳ بیان می‌گردد.

### ۳- قوانین شعاعی-کروی و شعاعی-کروی سیمپلکس

در مسایل فیلترینگ بی‌زین با دامنه گوسی، نیاز به محاسبه انتگرال‌هایی است که توابع زیر انتگرال در آن در حالت کلی به صورت حاصل ضرب یک تابع چگالی گوسی در یک تابع غیر خطی به فرم (۱۵) می‌باشند [۹]

$$I(g) = \int_{R^n} g(x) e^{(-x^T x)} dx \quad (15)$$

که با استفاده از حل روش‌های عددی، انتگرال‌های به فرم (۱۵) قابل تقریب به صورت جمع توابع وزن داری هستند که با (۱۶) قابل بیان است

$$Q(g) = \sum_{i=1}^{n_p} W_i g(x_i) \quad (16)$$

که  $x_i$  ها در اینجا همان نقاط برداری هستند. در روش مکعبی [۹] برای حل انتگرال‌های به فرم (۱۵) از قوانین شعاعی-کروی و در روش مکعبی سیمپلکس [۱۴] از قوانین شعاعی-کروی سیمپلکس استفاده می‌شود. حال با استفاده از تبدیل شعاعی-کروی (روابط (۱۷))، انتگرال کارترین (۱۵) به فرم انتگرال شعاعی-کروی (۱۸) نوشته می‌شود [۹]

$$x = ry \quad (17)$$

$$y^T y = 1$$

$$r = \sqrt{x^T x}$$

$$I(g) = \int_{U_n} \int_{\sigma} g(ry) r^{n-1} e^{-r^2} d\sigma(y) dr \quad (18)$$

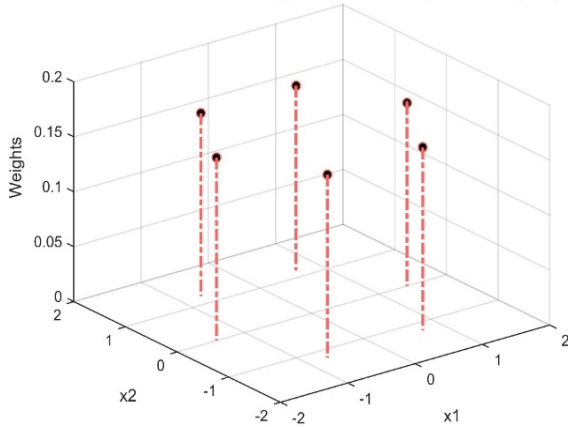
در (۱۸)،  $U_n$  رویه کره است که به صورت  $U_n = \{y \in \mathbb{R}^n | y^T y = 1\}$  تعریف شده و  $\sigma(\cdot)$  اندازه رویه کره می‌باشد. رابطه (۱۸) به شکل دو انتگرال جداگانه شعاعی و کروی به صورت (۱۹) و (۲۰) قابل بیان است

$$I = \int_{\sigma} S(r) r^{n-1} e^{-r^2} dr \quad (19)$$

$$S(r) = \int_{U_n} g(ry) d\sigma(y) \quad (20)$$

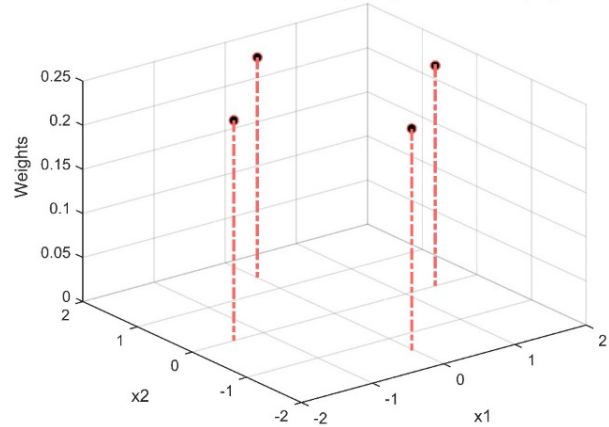
قانون گوس-لاگر تممیف یافته به صورت کارآمد برای محاسبه نقاط و وزن‌های انتگرال شعاعی (۱۹) استفاده می‌شود [۹] و [۱۲]. در نهایت با استفاده از برابری  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ، روابط (۲۱) قابل حصول هستند

Cubature Points Based-on 3rd-degree Spherical Simplex-Radial (SSR) Rule



شکل ۲: نقاط مکعبی به دست آمده بر اساس قانون شعاعی-کروی سیمپلکس درجه ۳ برای یک سیستم دوبعدی.

Cubature Points Based-on 3rd-degree Spherical-Radial (SR) Rule



شکل ۱: نقاط مکعبی به دست آمده بر اساس قانون شعاعی-کروی درجه ۳ برای یک سیستم دوبعدی.

حال اگر چگالی پسین به صورت (۲۹) نشان داده شود تخمین حالت پسین از (۳۳) به دست می‌آید

$$\hat{x}_{k|k} = E[x_k | y_k] = \sum_{i'=1}^{N_{gc}} \alpha_{k|k}^{i'} \hat{x}_{k|k}^{i'} \quad (33)$$

و به طور مشابه نیز کواریانس خطای پسین از (۳۴) قابل حصول است

$$P_{k|k} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T] \\ = \sum_{i'=1}^{N_{gc}} \alpha_{k|k}^{i'} [P_{k|k}^{i'} + (\hat{x}_{k|k} - \hat{x}_{k|k}^{i'}) (\hat{x}_{k|k} - \hat{x}_{k|k}^{i'})^T] \quad (34)$$

در (۳۳) و (۳۴)،  $E$  نماد امید ریاضی است.

### ۴-۲ پیاده‌سازی فیلتر کالمن مکعبی جمع گوسی با استفاده از قانون شعاعی-کروی سیمپلکس

در این بخش با استفاده از روابط بخش ۲ و قانون شعاعی-کروی سیمپلکس معرفی شده در بخش ۳ و همچنین روابط فیلتر جمع گوسی، الگوریتم روش پیشنهادی ارائه می‌گردد. فرض کنیم چگالی پسین در گام قبلی یعنی  $p(x_{k-1} | y_{k-1})$  به کمک معادلات فرایند و اندازه‌گیری معلوم بوده و در ابتدا آن را با استفاده از مجموع وزن‌داری از توابع گوسی تقریب می‌زنیم

$$\hat{p}(x_{k-1} | y_{k-1}) \approx \sum_{i'=1}^{N_{gc}} \alpha_{k-1|k-1}^{i'} N(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^{i'}, P_{k-1|k-1}^{i'}) \quad (35)$$

و نقاط مکعبی و وزن‌های متناظر را بر اساس قانون شعاعی-کروی سیمپلکس محاسبه می‌کنیم

$$C_p = \sqrt{n} \times [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n+1} \quad -a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_{n+1}] \quad (36)$$

$$W_i = \frac{1}{2n+2} \text{ for } i=1, 2, \dots, 2n+2 \quad (37)$$

در (۳۷)،  $a_j = [a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n}]^T$ ,  $j=1, 2, \dots, n+1$  و مقادیر  $a_{j,i}$ ها از (۲۵) محاسبه می‌شوند. از آنجایی که نقاط و وزن‌های متناظر آنها مستقل از اندازه‌گیری‌ها هستند، می‌توان به صورت برون‌خط قبل از اجرای مراحل بازگشتی فیلتر، این مقادیر را محاسبه و در حافظه ذخیره

### ۴-۱ فیلتر جمع گوسی

روش پیشنهادی در این مقاله شامل چند فیلتر کالمن مکعبی است که به طور موازی و در ساختار جمع گوسی اجرا شده و نقاط مکعبی در آنها بر اساس قانون شعاعی-کروی سیمپلکس به دست می‌آیند. مزیت اصلی استفاده از قانون شعاعی-کروی سیمپلکس افزایش دقت تخمین‌ها به ازای افزایش ناچیز بار محاسباتی به واسطه وجود دو نقطه افزوده شده است که در سیستم‌های با ابعاد بالا اهمیت زیادی ندارد. در این بخش ابتدا فیلتر جمع گوسی معرفی گردیده و سپس جزئیات روابط فیلتر پیشنهادی بررسی می‌شود.

در روش جمع گوسی، توابع چگالی پیشین و پسین در (۳) و (۴) به وسیله مجموع وزن‌داری از توابع گوسی معرفی می‌شوند [۲۴]. بنابراین چگالی پیشین را می‌توان به صورت (۲۸) بیان نمود

$$p(x_k | y_{k-1}) \approx \sum_{i'=1}^{N_{gc}} \alpha_{k|k-1}^{i'} N(x_k; \hat{x}_{k|k-1}^{i'}, P_{k|k-1}^{i'}) \quad (28)$$

در (۲۸)،  $N_{gc}$  نشان‌دهنده تعداد چگالی‌های گوسی و  $\alpha^{i'}$  وزن‌های متناظر آنها هستند. به صورت مشابه نیز چگالی پسین را می‌توان به فرم (۲۹) نمایش داد

$$p(x_k | y_k) \propto p(y_k | x_k) p(x_k | y_{k-1}) \\ \approx \sum_{i'=1}^{N_{gc}} \alpha_{k|k}^{i'} N(x_k; \hat{x}_{k|k}^{i'}, P_{k|k}^{i'}) \quad (29)$$

به روز رسانی وزن‌های چگالی‌های گوسی در حضور اندازه‌گیری‌ها از (۳۰) قابل محاسبه است [۲۴]

$$\alpha_{k|k}^{i'} = \frac{p(y_k | x_{k,i'}) \alpha_{k|k-1}^{i'}}{\sum_{i'=1}^{N_{gc}} p(y_k | x_{k,i'}) \alpha_{k|k-1}^{i'}} \quad (30)$$

وزن‌های  $\alpha_{k|k}^{i'}$  دارای دو ویژگی نرمالیزه‌بودن و مثبت‌بودن زیر هستند

$$\sum_{i'=1}^{N_{gc}} \alpha_{k|k}^{i'} = 1 \quad (31)$$

$$\alpha_{k|k}^{i'} \geq 0 \quad (32)$$

$$\hat{y}'_{k|k-1} = W_i \sum_{i=1}^{\nu n+\nu} Y'_{i,k|k-1} \quad (۴۷)$$

$$P'_{yy,k|k-1} = W_i \sum_{i=1}^{\nu n+\nu} (Y'_{i,k|k-1} - \hat{y}'_{k|k-1})(Y'_{i,k|k-1} - \hat{y}'_{k|k-1})^T + R_k \quad (۴۸)$$

$$P'_{xy,k|k-1} = W_i \sum_{i=1}^{\nu n+\nu} (X^{(*)i'}_{i,k-1|k-1} - \hat{x}'_{k|k-1})(Y'_{i,k|k-1} - \hat{y}'_{k|k-1})^T \quad (۴۹)$$

به کمک (۴۸) و (۴۹)، بهره فیلتر از (۵۰) محاسبه شده و مقادیر تخمین بردار حالت و ماتریس کواریانس خطا برای هر فیلتر به دست می‌آیند

$$K'_k = P'_{xy,k|k-1} P'_{yy,k|k-1}{}^{-1} \quad (۵۰)$$

$$\hat{x}'_{k|k} = \hat{x}'_{k|k-1} + K'_k (y_k - \hat{y}'_{k|k-1}) \quad (۵۱)$$

$$P'_{k|k} = P'_{k|k-1} - K'_k P'_{yy,k|k-1} K'^T_k \quad (۵۲)$$

در ادامه و در ساختار جمع گوسی، وزن‌های جدید برای هر فیلتر به طور مجزا از (۳۰) به دست می‌آیند که در آن  $p(y_k | x_k, i')$  احتمال اندازه‌گیری برای  $i'$  امین فیلتر کالمن مکعبی است که نمایانگر میزان همخوانی اندازه‌گیری انجام‌شده در هر لحظه با تخمین انجام‌شده به وسیله  $i'$  امین فیلتر کالمن مکعبی است که از (۵۳) قابل محاسبه است

$$p(y_k | x_k, i') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} P'_{yy,k|k-1}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(y_k - \hat{y}'_{k|k-1})^T}{P'_{yy,k|k-1}} \right]} \quad (۵۳)$$

در مرحله پایانی، مقادیر تخمین‌ها و ماتریس کواریانس خطای فیلتر جمع گوسی مکعبی با استفاده از جمع وزن‌داری از مقادیر آنها در هر فیلتر مطابق (۳۳) و (۳۴) به دست می‌آیند. ساختار کلی روش پیشنهادی برای تخمین حالات سیستم‌های غیر خطی در شکل ۳ نمایش داده شده است.

### ۵- شبیه‌سازی

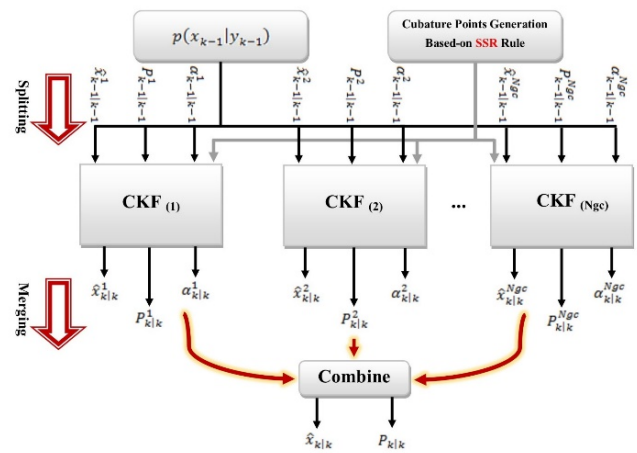
در این بخش، روش پیشنهادی بر روی دو مسأله غیر خطی یک‌بعدی و چندبعدی مورد آزمایش قرار گرفته و عملکرد آن با برخی روش‌های فیلترینگ مرسوم مقایسه می‌شود.

#### ۱-۵ تخمین حالت سیستم غیر خطی یک‌بعدی

سیستم در نظر گرفته شده برای تخمین حالت در [۲۵] و [۲۶] معرفی شده است که معادلات فرایند و اندازه‌گیری گسسته-زمان آن به صورت (۵۴) می‌باشد

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + \delta T x_{k-1} (1 - x_{k-1}) + v_{k-1} \\ y_k &= T x_k (1 - 0.7 \delta x_k) + W_k \end{aligned} \quad (۵۴)$$

که در (۵۴)،  $w_k$  و  $v_{k-1}$  نویزهای سفید گوسی بوده که به صورت  $v_{k-1} \sim (0, Q)$  و  $w_k \sim (0, R)$  تعریف می‌شوند که در آنها  $Q = b^T T$  و  $R = d^T T$  می‌باشند.  $T$  زمان نمونه‌برداری و  $b$  و  $d$  به عنوان ثوابت عددی هستند. این سیستم دارای سه نقطه تعادل  $+1$ ،  $-1$  و  $0$  است که دو نقطه تعادل اول آن پایدار و نقطه تعادل سوم ناپایدار است. بنابراین متغیرهای حالت حول نقاط تعادل پایدار باقی مانده و با گذشت زمان از یک نقطه به محل نقطه تعادل دیگر تغییر وضعیت می‌دهند. در شبیه‌سازی انجام‌شده، زمان نمونه‌برداری  $0.1$  ثانیه و مقادیر  $b$  و  $d$  به ترتیب  $0.5$  و  $0.1$  انتخاب شده‌اند. مقدار اولیه حالت سیستم یعنی  $x$  برابر با  $0.2$  و مقادیر اولیه برای همه فیلترهای اجراشده برابر با  $0.8$  و  $0.2$  می‌باشد.



شکل ۳: ساختار کلی روش تخمین پیشنهادی.

کرد. در ادامه و در مرحله پیش‌بینی با استفاده از تجزیه چولسکی<sup>۱</sup>، جذر ماتریس کواریانس خطای پسین گام قبلی را محاسبه می‌کنیم

$$P'_{k-1|k-1} = S'_{k-1|k-1} S'^T_{k-1|k-1} \quad (۳۸)$$

در ادامه، نقاط مکعبی با استفاده از تخمین‌های به دست آمده از گام قبلی ارزیابی شده و مطابق (۴۰) در تابع غیر خطی فرایند انتشار می‌یابند

$$X'_{i,k-1|k-1} = S'_{k-1|k-1} C_p + \hat{x}'_{k-1|k-1} \quad (۳۹)$$

$$X^{(*)i'}_{i,k-1|k-1} = f(X'_{i,k-1|k-1}) \quad (۴۰)$$

و تخمین و کواریانس پیش‌بینی به ترتیب از (۴۱) و (۴۲) محاسبه می‌شوند

$$\hat{x}'_{k|k-1} = W_i \sum_{i=1}^{\nu n+\nu} X^{(*)i'}_{i,k-1|k-1} \quad (۴۱)$$

$$P'_{k|k-1} = W_i \sum_{i=1}^{\nu n+\nu} (\hat{x}^{(*)i'}_{i,k-1|k-1} - \hat{x}'_{k|k-1})(\hat{x}^{(*)i'}_{i,k-1|k-1} - \hat{x}'_{k|k-1})^T + Q_{k-1} \quad (۴۲)$$

در مرحله پیش‌بینی وزن‌های چگالی‌های گوسی ثابت باقی می‌مانند، یعنی

$$\alpha'_{k|k-1} = \alpha'_{k-1|k-1} \quad (۴۳)$$

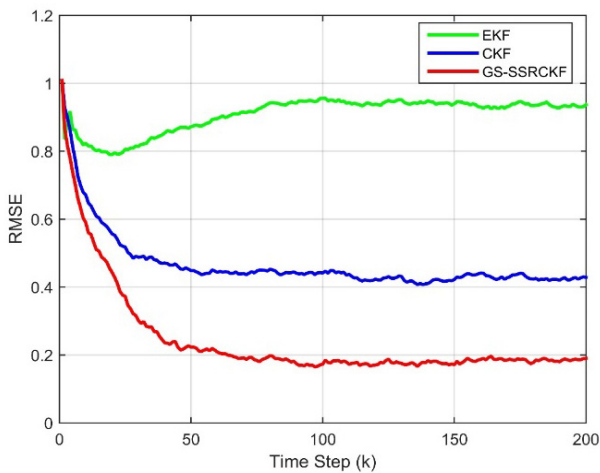
و چگالی پیشین به صورت مجموع وزن‌داری از چگالی‌های گوسی به صورت (۲۸) خواهد بود. حال در مرحله پیش‌بینی،  $p(x_k | y_{k-1})$  محاسبه شد و به کمک اندازه‌گیری جدید انجام‌گرفته  $y_k$  در مرحله به روز رسانی، به طور مشابه  $p(x_k | y_k)$  با مجموع وزن‌داری از چگالی‌های گوسی قابل محاسبه است. در مرحله به روز رسانی مجدداً با استفاده از تجزیه چولسکی، جذر ماتریس کواریانس خطای مرحله پیش‌بینی محاسبه شده و به کمک آن، نقاط مکعبی جدید ارزیابی و در تابع غیر خطی اندازه‌گیری انتشار می‌یابند:

$$P'_{k|k-1} = S'_{k|k-1} S'^T_{k|k-1} \quad (۴۴)$$

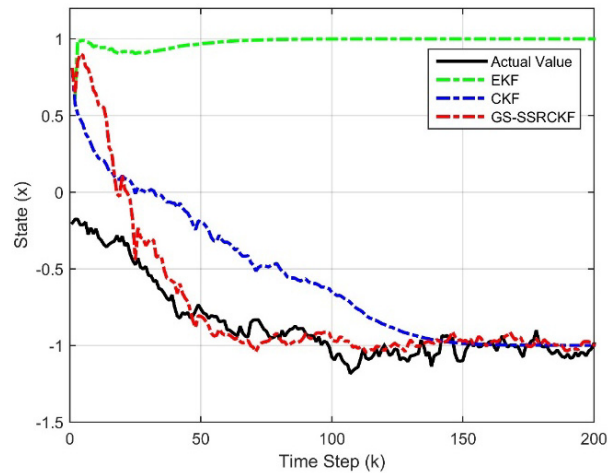
$$X'_{i,k|k-1} = S'_{k|k-1} C_p + \hat{x}'_{k|k-1} \quad (۴۵)$$

$$Y'_{i,k|k-1} = h(X'_{i,k|k-1}) \quad (۴۶)$$

در ادامه، اندازه‌گیری پیش‌بینی شده و ماتریس‌های کواریانس و کواریانس متقابل با (۴۷) تا (۴۹) تعیین می‌شوند



شکل ۵: مقایسه عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر تخمین با ۲۰۰ بار اجرای مونت کارلو.



شکل ۴: مقادیر واقعی و تخمین زده شده برای یک اجرای مونت کارلو.

۲ = P<sub>۱</sub> در نظر گرفته شده‌اند. همچنین مقادیر اولیه فیلترهای کالمن مکعبی در روش جمع گوسی با استفاده از همین مقادیر و به کمک تکنیک ارائه‌شده در [۲۷] به دست آورده شده است. تعداد فیلترهای کالمن مکعبی در روش جمع گوسی حداقل و برابر با ۲ در نظر گرفته شده و زمان کل شبیه‌سازی نیز ۲ ثانیه است. برای بررسی عملکرد فیلترها در این مقاله از معیار جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) استفاده شده که برای هر کدام از متغیرهای حالت سیستم از (۵۵) قابل محاسبه است

$$RMSE_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{N=1}^M (x_{k,true}^N - \hat{x}_{k|k}^N)^2} \quad (55)$$

در حل مسایل فیلترینگ در فضای تصادفی به منظور مقایسه عملکرد فیلترها از چند اجرای مستقل به روش مونت کارلو استفاده می‌شود. برای این مسأله تعداد اجراهای مستقل مونت کارلو M = ۲۰۰ انتخاب شده است. در شکل ۴ مقادیر واقعی و تخمین زده شده حالت برای یک بار اجرا نشان داده شده است. به منظور مقایسه دقیق‌تر عملکرد فیلترها در شکل ۵ عملکرد روش پیشنهادی (GS-SSRCKF) با فیلتر کالمن توسعه‌یافته [۹] و کالمن مکعبی [۹] بر اساس معیار RMSE مقایسه شده که حاکی از خطای کمتر در تخمین حالات توسط این فیلتر است.

### ۲-۵ تخمین حالت سیستم آشوب لورنز

به عنوان مسأله دوم، سیستم آشوب لورنز را در نظر می‌گیریم. این سیستم در سال ۱۹۶۳ میلادی توسط ادوارد لورنز کشف شد. در این مقاله سیستم آشوب با ابعاد ۳ در نظر گرفته شده است اما در مسایل دنیای واقعی، نمونه‌های با ابعاد بالاتر آن را می‌توان یافت [۲۸]. معادلات سیستم آشوب لورنز به صورت (۵۶) می‌باشد [۲۹]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, x_3) = \alpha[x_2(t) - x_1(t)] \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1(t)x_2(t) + \kappa x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t) \end{aligned} \quad (56)$$

در این مقاله برای شبیه‌سازی کامپیوتری، معادلات پیوسته- زمان (۵۶) را با استفاده از روش اوایلر گسسته‌سازی کرده که معادلات سیستم به فرم (۵۷) بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} x_{v,k+1} &= x_{v,k} + \Delta t f_v(x_1, x_2, x_3) \\ x_{r,k+1} &= x_{r,k} + \Delta t f_r(x_1, x_2, x_3) \\ x_{\tau,k+1} &= x_{\tau,k} + \Delta t f_{\tau}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (57)$$

نویز فرایند گوسی به صورت  $v_k \sim (0, Q)$  به معادلات (۵۷) افزوده شده که در آن ماتریس کواریانس نویز فرایند است که به صورت و به صورت تعریف می‌شود

$$Q = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.25 \end{bmatrix} \quad (58)$$

معادله اندازه‌گیری را به صورت فاصله از مبدأ به فرم (۵۹) تعریف کرده‌ایم

$$y_k = \sqrt{x_{v,k}^2 + x_{r,k}^2 + x_{\tau,k}^2} + w_k \quad (59)$$

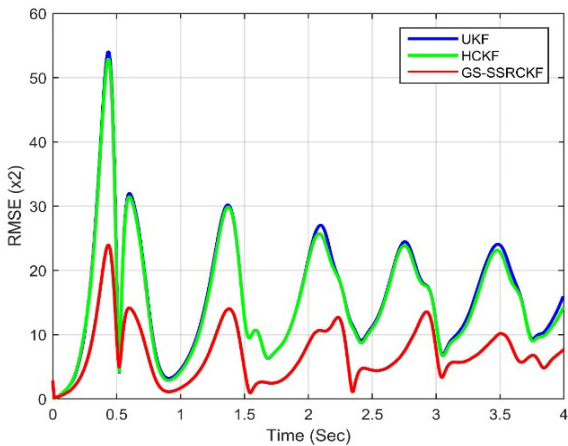
در (۵۹)،  $w_k \sim (0, \Delta t)$  است که مقدار  $\Delta t$  در شبیه‌سازی ۰.۱ انتخاب شده و مقادیر  $\alpha$ ،  $\kappa$  و  $\beta$  در معادلات فرایند به ترتیب ۱۰، ۲.۶۷ و ۲۸ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین مقادیر اولیه سیستم، مقادیر تخمین اولیه و کواریانس خطای اولیه به فرم (۶۰) تعریف شده‌اند

$$\begin{aligned} x_1 &= [-0.2 \quad -0.3 \quad -0.5] \\ \hat{x}_1 &= [1.35 \quad -3 \quad 6] \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 0.35 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.35 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.35 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

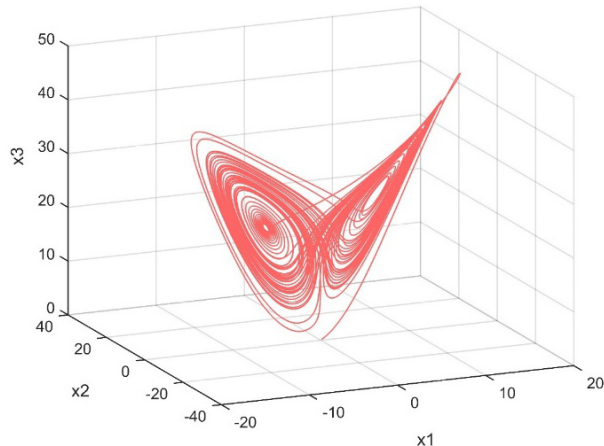
در شکل ۶ سیستم آشوب لورنز در محیط بدون نویز و در فضای سه‌بعدی نمایش داده شده است.

در شبیه‌سازی انجام‌گرفته، تعداد اجرای مونت کارلو برابر ۲۵ در نظر گرفته شده و مدت زمان کل شبیه‌سازی ۴ ثانیه است. تعداد فیلترهای کالمن مکعبی در ساختار جمع گوسی، ۳ در نظر گرفته شده است. برای این مسأله، عملکرد روش پیشنهادی با فیلتر کالمن خشی [۷] و فیلتر کالمن مکعبی درجه پنج [۱۲] به عنوان نسخه‌ای از فیلترهای کالمن مکعبی درجه بالا (HCKF) مقایسه شده است. مقادیر RMSE متغیرهای حالت سیستم به ترتیب در شکل‌های ۷ تا ۹ نشان داده شده‌اند که نشان از

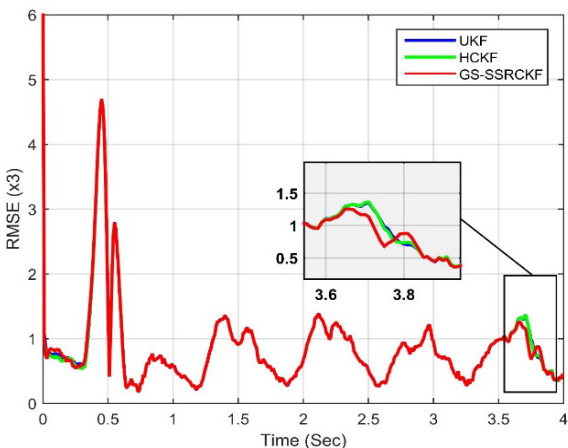




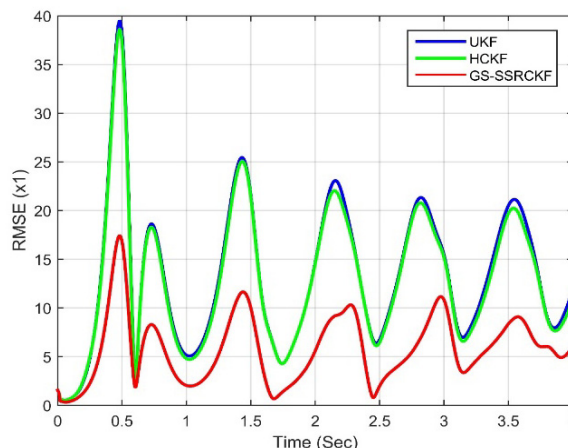
شکل ۸: مقایسه مقدار خطای RMSE برای متغیر حالت دوم.



شکل ۶: سیستم آشوب لورنز.



شکل ۹: مقایسه مقدار خطای RMSE برای متغیر حالت سوم.



شکل ۷: مقایسه مقدار خطای RMSE برای متغیر حالت اول.

[2] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, John Wiley & Sons, 2001.

[3] B. C. Kumar Pakki and G. Da-Wei, *Nonlinear Filtering Methods and Applications*, Springer, 2019.

[4] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35-45, Mar. 1960.

[5] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, 1974.

[6] M. Nørgaard, N. K. Poulsen, and O. Ravn, "New developments in state estimation for nonlinear systems," *Automatica*, vol. 36, no. 11, pp. 1627-1638, Apr. 2000.

[7] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, no. 3, pp. 477-482, Mar. 2000.

[8] K. Ito and K. Xiong, "Gaussian filters for nonlinear filtering problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, no. 5, pp. 910-927, May 2000.

[9] I. Arasaratnam, S. Haykin, and L. Fellow, "Cubature Kalman filters," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1254-1269, Jun. 2009.

[10] I. Arasaratnam, S. Haykin, and T. R. Hurd, "Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: theory and simulations," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 58, no. 10, pp. 4977-4993, Oct. 2010.

[11] I. Arasaratnam and S. Haykin, "Cubature Kalman smoothers," *Automatica*, vol. 47, no. 10, pp. 2245-2250, Oct. 2011.

[12] B. Jia, M. Xin, and Y. Cheng, "High-degree cubature Kalman filter," *Automatica*, vol. 49, no. 2, pp. 510-518, Feb. 2013.

[13] D. Meng, L. Miao, H. Shao, and J. Shen, "A seventh-degree cubature Kalman filter," *Asian J. of Control*, vol. 20, no. 1, pp. 250-262, Jan. 2018.

[14] S. Wang, J. Feng, and K. T. Chi, "Spherical simplex-radial cubature Kalman filter," *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 21, no. 1, pp. 43-46, Jan. 2013.

[15] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian

دقت بیشتر روش پیشنهادی دارد.

### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتم جدیدی برای تخمین حالت سیستم‌های غیر خطی ارائه شده است. این الگوریتم شامل یک دسته چندتایی از فیلترهای کالمن مکعبی است که در ساختار جمع گوسی و بر اساس انتشار نقاط مکعبی به دست آمده از قانون شعاعی-کروی سیمپلکس به تخمین متغیرهای حالت می‌پردازند. استفاده از قانون شعاعی-کروی سیمپلکس علاوه بر داشتن مزیت دقت بیشتر به علت دو نقطه مکعبی افزوده‌شده جهت انتشار در توابع، میزان بار محاسباتی تحمیل‌شده به پردازشگر توسط الگوریتم تخمین را به خصوص برای سیستم‌های با ابعاد بالا تغییر آنچنان نخواهد داد. به منظور نمایش عملکرد بهتر الگوریتم پیشنهادی در تخمین حالات، مقایسه‌ای بر اساس معیار RMSE بین چند روش فیلترینگ غیر خطی مرسوم و روش پیشنهادی روی دو سیستم نمونه صورت گرفت که نتایج حاصل نشان از دقت بیشتر روش پیشنهادی دارد. می‌توان از این الگوریتم در بسیاری از کاربردهای مهم نظیر ناوبری، ردیابی هدف و یا تخمین متغیرهای حالت سیستم‌های مکانیکی یا شیمیایی جهت مقاصد کنترلی بهره گرفت.

### مراجع

[1] N. Gordon, B. Ristic, and S. Arulampalam, *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House, 2004.

- [26] S. Bhaumik, M. Srinivasan, S. Sadhu, and T. K. Ghoshal, "Adaptive grid risk-sensitive filter for non-linear problems," *IET Signal Processing*, vol. 5, no. 2, pp. 235-241, Apr. 2011.
- [27] F. Faubel and D. Klakow, "Further improvement of the adaptive level of detail transform: splitting in direction of the nonlinearity," in *Proc. 18th European Signal Processing Conf.*, pp. 850-854, Aalborg, Denmark, 23-27 Aug. 2010.
- [28] I. Stewart, "The Lorenz attractor exists," *Nature*, vol. 406, no. 6799, pp. 948-949, Aug. 2000.
- [29] K. Nosrati, C. Volos, and A. Azemi, "Cubature Kalman filter-based chaotic synchronization and image encryption," *Signal Processing: Image Communication*, vol. 58, pp. 35-48, Oct. 2017.
- [16] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*, John Wiley & Sons, 2006.
- [17] P. H. Leong, S. Arulampalam, T. A. Lahewa, and T. D. Abhayapala, "A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 1161-1176, Apr. 2013.
- [18] R. Radhakrishnan, S. Bhaumik, and N. K. Tomar, "Gaussian sum shifted Rayleigh filter for underwater bearings-only target tracking problems," *IEEE J. of Oceanic Engineering*, vol. 44, no. 2, pp. 492-501, Apr. 2018.
- [19] L. Wang and X. Cheng, "Algorithm of gaussian sum filter based on high-order UKF for dynamic state estimation," *International J. of Control, Automation and Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 652-661, Mar. 2015.
- [20] S. Sarkka, "On unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1631-1641, Sept. 2007.
- [21] G. Mohammaddadi, N. Pariz, and A. Karimpour, "Modal Kalman filter," *Asian J. of Control*, vol. 19, no. 2, pp. 728-738, Mar. 2017.
- [22] B. Jia, M. Xin, and Y. Cheng, "Sparse-grid quadrature nonlinear filtering," *Automatica*, vol. 48, no. 2, pp. 327-341, Feb. 2012.
- [23] A. Genz and J. Monahan, "Stochastic integration rules for infinite regions," *SIAM J. on Scientific Computing*, vol. 19, no. 2, pp. 426-439, Mar. 1998.
- [24] J. H. Kotecha and P. M. Djuric, "Gaussian sum particle filtering," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 51, no. 10, pp. 2602-2612, Oct. 2003.
- [25] S. Sadhu, S. Bhaumik, A. Doucet, and T. K. Ghoshal, "Particle-method-based formulation of risk-sensitive filter," *Signal Processing*, vol. 89, no. 3, pp. 314-319, Mar. 2009.

**محمدامین احدپور کاخک** تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق به ترتیب در دانشگاه صنعتی سجاد و دانشگاه فردوسی مشهد به پایان رسانده است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان سیستم‌های کنترل غیرخطی، تخمین حالت و فیلترینگ غیرخطی می‌باشد.

**بهروز صفری نژادیان** تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برق به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۱ و ۱۳۸۴ از دانشگاه شیراز و در مقطع دکتری مهندسی برق در سال ۱۳۸۸ از دانشگاه صنعتی امیرکبیر به پایان رسانده است و هم‌اکنون استاد دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی شیراز می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: کنترل فرآیندهای تصادفی، پردازش آماری سیگنال، شبکه‌های حسگر، سیستم‌های کنترل و سیستم‌های چندعاملی.