تحقق بهبودیافته گیت‌های یکانی کنترل‌شده در مدل محاسباتی کوانتومی یک‌طرفه با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته

محبوبه هوشمند و منیره هوشمند

چکیده: **در مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه (1WQC)، همبستگی کوانتومی در یک مدل درهم‌تنیده که حالت گرافی یا حالت خوشه‌ای خوانده می‌شود، باعث می‌گردد که محاسبات جامع کوانتومی تنها با استفاده از اندازه‌گیری‌های تک‌کیوبیتی محقق شود. در 1WQC محاسبات با الگوهای اندازه‌گیری یا به طور خلاصه الگو نمایش داده می‌شوند. مسأله سنتز در مدل 1WQC به صورت استخراج الگو از یک ماتریس یکانی دلخواه ورودی تعریف می‌شود. معیارهای اصلی در ارزیابی الگوهای اندازه‌گیری در مدل 1WQC، اندازه، عمق الگو و تعداد درهم‌تنیدگی‌های الگو است. در این مقاله، روش جدیدی برای سنتز گیت‌های یکانی U کنترل‌شده که U یک گیت تک‌کیوبیتی است در مدل 1WQC ارائه شده است. بدین منظور برای نخستین بار، ایده استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته (که از اندازه‌گیری در صفحات مختلف کره بلاخ بهره می‌برد) در مفهوم سنتز در مدل 1WQC استفاده می‌شود. بهینه‌سازی‌هایی نیز مبتنی بر این ایده پیشنهاد شده و با استفاده از آن، روش پیشنهادی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده در مدل 1WQC معیارهای ارزیابی اندازه، عمق و تعداد درهم‌تنیدگی‌های الگو را نسبت به بهترین کار قبلی به ترتیب به میزان ۹٫۱٪، ۳۰٪ و ۱۸٫۱٪ بهبود می‌دهد.**

کلیدواژه: **بهینه‌سازی، حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته، سنتز، گیت‌های یکانی کنترل‌شده، مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه.**

۱- مقدمه

محاسبات کوانتومی[1] [۱] تا [۳] یک روش جدید پردازش اطلاعات و حاصل ترکیب مکانیک کوانتومی، علوم کامپیوتر و نظریه اطلاعات کلاسیک است. پس از کشف الگوریتم‌های کوانتومی که قادر هستند مسایل محاسباتی سنگین را بسیار سریع‌تر از الگوریتم‌های کلاسیک حل کنند، توجه ویژه دانشگاه‌ها و سرمایه‌گذاری‌های کلان صنایع به این زمینه نوظهور جلب شده است. به عنوان نمونه‌ای از این الگوریتم‌ها می‌توان به امکان تجزیه سریع اعداد بزرگ [۴] و جستجوی سریع [۵] در یک مجموعه تصادفی اشاره کرد. ویژگی‌های قابل توجه مکانیک کوانتومی مانند درهم‌تنیدگی[2] و برهم‌نهی[3] باعث قدرت کامپیوترهای کوانتومی می‌شود.

یکی از مدل‌های مشهور محاسبات کوانتومی، مدل مداری کوانتومی[4] [۱] و [۶] می‌باشد که تاکنون پژوهش‌های مختلفی روی آن صورت گرفته است. در این مدل، محاسبات کوانتومی با مدارهای کوانتومی که از یک توالی از گیت‌های کوانتومی (نمایش داده شده با ماتریس‌های یکانی) تشکیل گردیده، نمایش داده می‌شوند.

ایده‌های جدیدی برای استفاده از مفاهیم اندازه‌گیری و درهم‌تنیدگی به منظور انجام محاسبات کوانتومی معرفی شده که مدل محاسباتی مبتنی بر اندازه‌گیری[5] (MBQC) [۷] و [۸] خوانده می‌شود. این مدل با مدل مداری کوانتومی که در آن اندازه‌گیری‌ها تنها در پایان محاسبات به منظور استخراج خروجی‌های کلاسیک اعمال می‌شود متفاوت است.

مدل MBQC از یک وضعیت ثابت درهم‌تنیده و اولیه از کیوبیت‌ها شروع می‌کند و محاسبات با استفاده از دنباله‌ای از اندازه‌گیری‌ها بر روی کیوبیت‌های مشخص در پایه‌های مشخص انجام می‌گیرد. انتخاب پایه‌های اندازه‌گیری بعدی ممکن است به خروجی اندازه‌گیری‌های قبلی وابسته باشد و نتیجه نهایی محاسبات با خروجی‌های کلاسیک تمام اندازه‌گیری‌ها مشخص می‌شود. دو دسته اصلی از MBQC، محاسبات کوانتومی مبتنی بر مخابره از راه دور[6] (TQC) [۹] و محاسبات کوانتومی یک‌طرفه[7] (1WQC) [۱۰] است.

مدل 1WQC نخستین بار توسط راسندورف[8] و بریگل[9] معرفی شد [۱۰]. در 1WQC، همبستگی[10] کوانتومی در یک مدل درهم‌تنیده که حالت گرافی یا حالت خوشه‌ای خوانده می‌شود، باعث می‌گردد که محاسبات جامع[11] کوانتومی تنها با استفاده از اندازه‌گیری‌های تک‌کیوبیتی محقق شود. از آنجا که وضعیت اولیه سیستم در حین این اندازه‌گیری‌ها از بین می‌رود، این مدل به مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه معروف است. این مدل به دلایل مختلفی توجه پژوهشگران را به خود جلب نموده که از جمله آنها می‌توان پیاده‌سازی فیزیکی متفاوت و نویدبخش این مدل در تکنولوژی‌های مختلف کوانتومی را ذکر کرد [۸] و [۱۱]. 1WQC مزایای پیاده‌سازی قابل توجهی در تکنولوژی‌های فیزیکی مختلف دارد [۸]. به نظر می‌رسد برای این مدل شبکه‌های نوری خطی[12] یکی از بهترین نامزدهای پیاده‌سازی باشند. در این روش از فوتون برای تحقق کیوبیت استفاده می‌شود و از مزایای آن، این است که فوتون‌ها با یکدیگر برهم‌کنش ندارند و لذا ناهمدوسی اندکی دارند. پیاده‌سازی فیزیکی این مدل در تکنولوژی‌های مختلف کوانتومی محقق شده است. برای مثال در [۱۱] پیاده‌سازی مدل 1WQC با تعداد کمی کیوبیت با فوتون‌ها برای

این مقاله در تاریخ ۱۲ اسفند ماه ۱۳۹۶ دریافت و در تاریخ ۱۳ تیر ماه ۱۳۹۷ بازنگری شد.

محبوبه هوشمند، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، (email: houshmand@mshdiau.ac.ir).

منیره هوشمند (نویسنده مسئول)، گروه مهندسی برق، دانشگاه بین‌المللی امام رضا، مشهد، ایران، (email: m.hooshmand@imamreza.ac.ir).

1. Quantum Computation
2. Entanglement
3. Superposition
4. Quantum Circuit Model
5. Measurement-Based Quantum Computation
6. Teleportation-Based Quantum Computation
7. One-Way Quantum Computation
8. Raussendorf
9. Briegel
10. Correlation
11. Universal
12. Linear Optics

اجرای الگوریتم جستجوی گراور انجام شده است. هر فوتون با قطبش[1] یا درجه آزادی فضایی[2] خود می‌تواند دو حالت پایه یک کیوبیت را نمایش دهد. در [۱۲] روشی با سرعت بالا برای پیاده‌سازی محاسبات کوانتومی یک‌طرفه کارا و مقیاس‌پذیر با استفاده از تله‌یونی[3] انجام شده است. اعمال درهم‌تنیدگی‌ها موازی با هم انجام می‌شوند که سرعت عملیات را افزایش می‌دهد و اندازه‌گیری‌ها به سرعت انجام می‌شوند. در [۱۳] یک روش پیاده‌سازی عملی از ۱WQC در یک سیستم تمام‌نوری[4] بر روی یک وضعیت خوشه‌ای ۵ کیوبیتی برای حل مسأله Simon ارائه شده است.

همچنین این مدل از دو مفهوم مهم دنیای کوانتوم یعنی درهم‌تنیدگی و اندازه‌گیری احتمالاتی که هیچ معادلی در محاسبات کلاسیک (دودویی) ندارند استفاده می‌کند و مدل محاسباتی متفاوتی نسبت به مدل مداری کوانتومی را معرفی می‌کند. مدل مداری کوانتومی بیشتر به مدل گیتی محاسبات کلاسیک شبیه است. این مدل همچنین منظر جدیدی را در رابطه با مسأله عمق محاسبات کوانتومی باز می‌کند. برای مثال، اعمالی که شامل گیت‌های کلیفورد هستند می‌توانند در یک عمق ثابت در مدل ۱WQC پیاده‌سازی شوند که به این معنا است که تمام اندازه‌گیری‌هایی که برای پیاده‌سازی این اعمال نیاز است می‌توانند هم‌زمان صورت بگیرند [۷].

مسأله سنتز در دنیای محاسبات کلاسیک به طور کلی به تبدیل یک توصیف سطح بالا (مانند جدول درستی یک تابع منطقی) به توصیفی قابل پیاده‌سازی در سخت‌افزار اشاره دارد. سنتز می‌تواند همراه با بهینه‌سازی باشد. محاسبات در مدل ۱WQC به صورت الگوهای اندازه‌گیری نشان داده می‌شوند که این الگوها حاوی اطلاعات مورد نیاز برای پیاده‌سازی در تکنولوژی‌های کوانتومی هستند. مسأله سنتز در [۱۴] به صورت تبدیل یک ماتریس یکانی ورودی به یک الگوی اندازه‌گیری ۱WQC تعریف می‌شود. در این مقاله برای نخستین بار، ایده استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته (که از اندازه‌گیری در صفحات مختلف کره بلاخ بهره می‌برد) در مفهوم سنتز در مدل ۱WQC استفاده می‌شود. بهینه‌سازی‌هایی مبتنی بر این حساب اندازه‌گیری معرفی شده و روش جدیدی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده دوکیوبیتی[5] با استفاده از این مفهوم در مدل ۱WQC ارائه گردیده که معیارهای ارزیابی الگو را نسبت به روش‌های قبلی بهبود می‌دهد. در [۱۵] نشان داده شده که هر ماتریس یکانی با ابعاد $2^n \times 2^n$ می‌تواند بر روی یک کامپیوتر کوانتومی با n کیوبیت با یک مجموعه محدود از گیت‌های یکانی کنترل‌شده و گیت‌های تک‌کیوبیتی پیاده‌سازی شود. از این رو گیت‌های یکانی کنترل‌شده و گیت‌های تک‌کیوبیتی، مجموعه گیت‌های ابتدایی[6] را در محاسبات کوانتومی تشکیل می‌دهند و لذا سنتز آنها حایز اهمیت هست.

ساختار این مقاله به صورتی که در ادامه می‌آید است: در بخش ۲ مفاهیم اولیه مورد نیاز جهت درک بهتر از مطالب بیان‌شده در بخش‌های آتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳ مروری بر پژوهش‌های پیشین آمده است. روش پیشنهادی در بخش ۴ و نتایج ارزیابی و تحلیل در بخش ۵ آمده است. سپس در بخش ۶ یک جمع‌بندی از مطالب مطرح‌شده در این مقاله ارائه خواهد شد. بخش ۷ به پیوست و بخش ۸ به مراجع اختصاص دارند.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش، مفاهیم اولیه در مدل ۱WQC که برای درک بهتر این مقاله مورد نیاز هستند معرفی می‌شوند.

۲-۱ مدل محاسباتی کوانتومی یک‌طرفه (۱WQC)

در مدل ۱WQC، همبستگی کوانتومی به صورت گرافی و یا خوشه‌ای نمایش داده می‌شود و بنابراین به این مدل، مدل گرافی یا مدل خوشه‌ای نیز می‌گویند. محاسبات در ۱WQC می‌توانند با یک الگوی اندازه‌گیری [۱۶] نمایش داده شوند که یک الگوی اندازه‌گیری ۱WQC با مجموعه $P=(VS,IS,OS,A)$ تعریف می‌گردد. VS[7] مجموعه تمام کیوبیت‌ها، IS[8] مجموعه کیوبیت‌های ورودی، OS[9] مجموعه کیوبیت‌های خروجی و A[10] مجموعه دستورهایی است که بر روی VS عمل می‌کنند. الگوی مورد نظر به صورت ترتیبی از دستورها که شامل چهار دستور است و در ادامه معرفی می‌گردد نوشته می‌شود. دستورها از راست به چپ اعمال می‌شوند و بنابراین ابتدای الگو در سمت راست بوده و انتهای آن در سمت چپ قرار می‌گیرد.

- دستور آماده‌سازی[11] که با N_i نمایش داده می‌شود کیوبیت i را در حالت کوانتومی $|+\rangle=(1/\sqrt{2})(|0\rangle+|1\rangle)$ قرار می‌دهد. این دستور بر روی تمام کیوبیت‌های غیر ورودی اعمال می‌شود، لذا این دستور از الگو حذف و فرض خواهد شد که به طور ضمنی بر تمام کیوبیت‌های غیر ورودی اعمال شده است.
- دستور بعدی E_{ij} است که دو کیوبیت i و j را در حالت درهم‌تنیده قرار می‌دهد و معادل اعمال گیت CZ بر روی این دو کیوبیت است و از آنجا که CZ متقارن می‌باشد داریم $E_{ij}=E_{ji}$.
- دستور اندازه‌گیری M_i^α کیوبیت i را در پایه $|\pm_\alpha\rangle=(1/\sqrt{2})(|0\rangle\pm e^{i\alpha}|1\rangle)$ اندازه‌گیری می‌نماید.

تمام کیوبیت‌های غیر خروجی اندازه‌گیری خواهند شد و نتیجه اندازه‌گیری به طور کلاسیک با استفاده از سیگنال s_i نشان داده می‌شود. اگر نتیجه اندازه‌گیری دستور M_i^α برابر $|+_\alpha\rangle$ باشد، $s_i=0$ و اگر این نتیجه برابر $|-_\alpha\rangle$ باشد، $s_i=1$ خواهد بود. این نتایج با یکدیگر جمع به پیمانه ۲ می‌شوند و به مجموع نتایج اندازه‌گیری‌ها، سیگنال[12] گفته می‌شود. در مدل محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری، نتایج برخی از اندازه‌گیری‌ها به دیگر اندازه‌گیری‌ها وابسته است. یک اندازه‌گیری می‌تواند طبق (۱) به دو سیگنال s و t وابسته باشد

$$ {}^{t}[M_i^\alpha]^s = M_i^\alpha X_i^s Z_i^t = M_i^{(-1)^s\alpha+t\pi} \quad (۱)$$

برای محاسبه سیگنال‌های s و t باید تمام نتایج اندازه‌گیری که در این دو سیگنال حضور دارند مشخص شوند. به عبارت دیگر، تمام اندازه‌گیری‌ها باید قبل از اندازه‌گیری وابسته انجام شود.

- دو دستور تصحیح X_i^s و Z_i^s نیز وجود دارد. اگر سیگنال $s=1$ باشد این دستورها، گیت‌های پائولی X و Z را به کیوبیت i اعمال

1. Polarization
2. Spatial Degree of Freedom
3. Ion-Trap
4. All-Optical
۵. در سراسر این مقاله، گیت‌های یکانی کنترل‌شده، دوکیوبیتی فرض می‌شوند.
6. Elementary

7. Vertex Set
8. Input Set
9. Output set
10. Actions
11. Preparation
12. Signal

می‌کنند و اگر سیگنال $s=۰$ باشد طبق (۲) کاری انجام نمی‌شود

$$X_i^{\prime}=X_i \quad Z_i^{\prime}=Z_i \quad X_i^{\cdot}=Z_i^{\cdot}=I_i \qquad (۲)$$

دستورهای تصحیح به صورت (۳) و (۴) با اندازه‌گیری‌های وابسته مرتبط هستند

$${}^{t}[M_i^{\alpha}]^{s}X_i^{r}={}^{t}[M_i^{\alpha}]^{s+r} \qquad (۳)$$

$${}^{t}[M_i^{\alpha}]^{s}Z_i^{r}={}^{t+r}[M_i^{\alpha}]^{s} \qquad (۴)$$

برای مثال، الگوی گیت CNOT به صورت (۵) نشان داده می‌شود

$$P=\{\{۱,۲,۳,۴\},\{۱,۲\},\{۱,۴\},X_۴^{s_۳}Z_۴^{s_۲}M_۳^{\cdot}M_۲^{\cdot}E_{۱۳}E_{۲۳}E_{۳۴}\} \qquad (۵)$$

که $\{۱,۲,۳,۴\}$ مجموعه تمام کیوبیت‌ها، $\{۱,۲\}$ مجموعه کیوبیت‌های ورودی و $\{۱,۴\}$ مجموعه کیوبیت‌های خروجی است.

۲-۲ بهینه‌سازی در الگوی محاسباتی کوانتومی یک‌طرفه

از دیگر عملیات در مدل ۱WQC، بهینه‌سازی است. این مرحله از سه گام استانداردسازی[۱]، انتقال سیگنال[۲] و ساده‌سازی پائولی[۳] تشکیل گردیده گردیده و در ادامه معرفی شده است [۱۶].

استانداردسازی

در این روش با اعمال دستوراتی، الگوها به شکل استاندارد بازنویسی می‌شوند. به الگویی استاندارد گفته می‌شود که در آن نخست دستورات درهم‌تنیدگی اجرا شود، سپس عملیات اندازه‌گیری اعمال شده و در نهایت با انجام دستورات تصحیح پایان یابد. یک الگوی استاندارد به صورت CME نمایش داده می‌شود. در این صورت E دستورات درهم‌تنیدگی، M دستورات اندازه‌گیری و C دستورات تصحیح (اعمال گیت‌های X و Z) را دربرمی‌گیرد.

به منظور انتقال دستور درهم‌تنیدگی (E) به ابتدای الگو از (۶) تا (۸) استفاده می‌شود

$$E_{ij}X_i^{s}\Rightarrow X_i^{s}Z_j^{s}E_{ij} \qquad (۶)$$

$$E_{ij}Z_i^{s}\Rightarrow Z_j^{s}E_{ij} \qquad (۷)$$

$$E_{ij}A_{\vec{k}}\Rightarrow Z_j^{s}\rightarrow E_{ij} \qquad (۸)$$

در (۸)، A هر عملگری غیر از E است که بر روی مجموعه k کیوبیتی که کیوبیت‌های i و j را دربرنمی‌گیرد اعمال می‌شود.

به منظور انتقال عملگرهای تصحیح در انتهای الگو از (۹) و (۱۰) استفاده می‌شود

$$A_{\vec{k}}X_i^{s}\Rightarrow X_i^{s}A_{\vec{k}} \qquad (۹)$$

$$A_{\vec{k}}Z_i^{s}\Rightarrow Z_i^{s}A_{\vec{k}} \qquad (۱۰)$$

در روابط بالا A عملگری دلخواه است که بر روی مجموعه k کیوبیتی که شامل کیوبیت i نیست اعمال می‌گردد.

ساده‌سازی پائولی

اگر زاویه اندازه‌گیری برابر صفر باشد به آن اندازه‌گیری پائولی X و اگر زاویه اندازه‌گیری برابر $\pi/۲$ باشد به آن اندازه‌گیری پائولی Y گویند. اگر عمل اندازه‌گیری پائولی X بر روی یک کیوبیت انجام شود می‌توان عمل تصحیح X بر روی آن کیوبیت را حذف کرد. اگر بر روی کیوبیتی اندازه‌گیری پائولی Y انجام شود، عمل تصحیح X را می‌توان با عمل Z جایگزین کرد و سپس با استفاده از انتقال سیگنال که در بخش بعد توضیح داده می‌شود به انتهای الگو انتقال داد.

در ادامه در (۱۱) تا (۱۴) قوانین موجود در ساده‌سازی پائولی آمده‌اند

$$M_i^{\cdot}X_i^{s}\Rightarrow M_i^{\cdot} \qquad (۱۱)$$

$${}^{t}[M_i^{\cdot}]^{s}\Rightarrow {}^{t}[M_i^{\cdot}] \qquad (۱۲)$$

$${}^{t}[M_i^{\frac{\pi}{۲}}]^{s}\Rightarrow {}^{t+s}[M_i^{\frac{\pi}{۲}}] \qquad (۱۳)$$

$$X_i^{s}Z_i^{t}\Rightarrow Z_i^{t}X_i^{s} \qquad (۱۴)$$

انتقال سیگنال

به منظور بهینه‌سازی الگوهای کوانتومی روش دیگری به نام انتقال سیگنال معرفی شده است. این روش این امکان را می‌دهد که بتوان تمام دستورات تصحیح Z بر روی کیوبیت‌های اندازه‌گیری‌شده را به انتهای الگو منتقل کرد. در ادامه در (۱۵) تا (۱۸) قوانین مربوط به این بهینه‌سازی آورده شده است

$${}^{t}[M_i^{\cdot}]\Rightarrow \varsigma_i^{r}[M_i^{\cdot}] \qquad (۱۵)$$

$${}^{t}[M_j^{\cdot}]\varsigma_i^{r}\Rightarrow \varsigma_i^{r}\,{}^{t[(r+s_i)/s_i]}[M_j^{\alpha}]^{s[(r+s_i)/s_i]} \qquad (۱۶)$$

$$X_j^{s}\varsigma_i^{r}\Rightarrow \varsigma_i^{r}X_j^{s[(r+s_i)/s_i]} \qquad (۱۷)$$

$$Z_j^{s}\varsigma_i^{r}\Rightarrow \varsigma_i^{r}Z_j^{s[(r+s_i)/s_i]} \qquad (۱۸)$$

در روابط بالا $s[(r+s_i)/s_i]$ نمایش‌دهنده جابه‌جایی سیگنال s_i با $r+s_i$ در سیگنال s است. عملگر انتقال سیگنال با ς_i^{r} نمایش داده شده که از آن برای انتقال سیگنال به سمت چپ الگوی محاسباتی ۱WQC استفاده می‌شود.

۳-۲ معیارهای هزینه الگوی اندازه‌گیری ۱WQC

در این بخش معیارهای مختلف هزینه الگوی ۱WQC بیان می‌شوند.

- اندازه الگو: اندازه الگو تعداد کیوبیت‌ها در الگو است. هر کیوبیت غیر خروجی دقیقاً یک بار در این الگو اندازه‌گیری می‌شود، لذا تعداد کیوبیت‌های غیر خروجی نشان‌دهنده تعداد اندازه‌گیری‌ها نیز است.
- عمق یک الگو: عمق یک الگو به شکل استاندارد مجموع عمق آماده‌سازی و بخش محاسبات کوانتومی می‌باشد و نشان‌دهنده پیچیدگی زمانی الگو است. از آنجا که کیوبیت‌ها به علت ناهمدوسی بعد از مدتی وضعیت خود را از دست می‌دهند، کاهش عمق یک الگو مهم است.
- عمق آماده‌سازی: این عمق مربوط به اِعمال دستورهای درهم‌تنیدگی‌ها و آماده‌سازی است. عمق آماده‌سازی برای یک گراف درهم‌تنیدگی G، یا $\Delta(G)$ یا $\Delta(G)+۱$ است که در آن $\Delta(G)$ بیشینه درجه در گراف می‌باشد.
- عمق محاسبات کوانتومی: این عمق، عمق اجرای یک الگو به علت وابستگی‌های اندازه‌گیری و دستورات تصحیح بر روی نتایج

1. Standardization
2. Signal Shifting
3. Pauli Simplification

اندازه‌گیری قبلی است. برای مثال برای الگویی به صورت (۱۹)

$$Z_g^{s_b} X_g^{s_d} Z_f^{s_b} Z_f^{s_a} Z_e^{s_a} X_e^{s_c} [M_d^{\delta}]^{s_b} [M_c^{\gamma}]^{s_a}\ {}^{s_a}[M_b^{\beta}] M_a^{\alpha} E_G \quad (۱۹)$$

که G گراف درهم‌تنیدگی این الگو است. عمق محاسبات کوانتومی به علت وابستگی‌های کیوبیت‌های $a \to b \to d \to g$، برابر با ۴ است که هر پیکان وابستگی یک کیوبیت (برای مثال b) به کیوبیت دیگر (برای مثال a) را نشان می‌دهد.

- حداکثر تعداد درهم‌تنیدگی: این معیار در [۱۴] معرفی و در نظر گرفته شده است. تعداد درهم‌تنیدگی مورد نیاز برای ایجاد یک وضعیت گرافی برابر با تعداد یال‌های (اندازه) این گراف است.

۳- پژوهش‌های پیشین

مدل 1WQC نخستین بار به وسیله راسندورف و بریگل معرفی شد [۱۰]. آنها در این مقاله، جهان‌شمول‌بودن[1] مدل 1WQC را در یک ساختار خوشه دوبعدی با ترجمه مدارهای کوانتومی متشکل از گیت‌های CNOT و چرخش‌های تک‌کیوبیتی به الگوهای اندازه‌گیری اثبات کردند.

با برداشتن محدودیت خوشه دوبعدی، در [۱۷] و [۱۸] روشی ارائه شده که یک مدار شامل گیت‌های CZ و J را که بر روی n کیوبیت عمل می‌کند به عنوان ورودی، دریافت و سپس هر گیت را با الگوی معادل خود جایگزین می‌کند و در نهایت بهینه‌سازی‌های استانداردسازی، ساده‌سازی پائولی و انتقال سیگنال را روی آنها اعمال می‌نماید. مدل مبتنی بر وضعیت گرافی، همان مدل معرفی‌شده در زیربخش ۲-۱ است که در آن کیوبیت‌ها می‌توانند در هر ساختاری از گراف درهم‌تنیدگی قرار بگیرند که به معیارهای اندازه‌گیری بهتری نسبت به ساختار خوشه دوبعدی می‌انجامد. در [۱۹] یک روش خودکار برای تبدیل مدارهای کوانتومی به الگوهای اندازه‌گیری 1WQC با انجام بهینه‌سازی‌های ارائه‌شده در زیربخش ۲-۱ آمده است.

در [۲۰] روشی برای سنتز گیت‌های یکانی دلخواه کنترل‌شده به کتابخانه گیت CZ و J ارائه شده است. ایده اصلی این مقاله بر مبنای روش معرفی‌شده در [۲] به منظور تجزیه گیت یکانی کنترل‌شده به گیت‌های CNOT و دوران است. این مدار به الگوی 1WQC معادل ترجمه شده و پس از اعمال بهینه‌سازی‌های مطرح‌شده در زیربخش ۲-۲، به الگویی با اندازه ۱۴ و عمق محاسبات کوانتومی ۷ می‌انجامد.

در [۲۱] و [۲۲] الگوی اندازه‌گیری برای جمع‌کننده کوانتومی با پیش‌بینی رقم نقلی[2] ارائه شده است. این روش پس از ترجمه مدار کوانتومی این جمع‌کننده به الگوی اندازه‌گیری مربوط، بهینه‌سازی‌هایی را به صورت دستی انجام می‌دهد. جمع‌کننده طراحی‌شده از امکانات موازی‌سازی 1WQC استفاده کرده و عمق محاسبات کوانتومی را نسبت به مدار کوانتومی معادل کاهش می‌دهد.

در [۱۷] این مدل به منظور کاهش عمق مدارهای کوانتومی استفاده شده است. نویسندگان مقاله در روش خود نخست مدار کوانتومی را به الگوی 1WQC تبدیل کرده و پس از اعمال بهینه‌سازی‌های مطرح‌شده در زیربخش ۲-۲، الگوی مورد نظر را مجدداً به مدار کوانتومی تبدیل کردند. از آنجایی که تعداد کیوبیت‌های کمکی در مدار کوانتومی ثانویه (مداری که مجدداً از الگوی محاسبات کوانتومی یک‌طرفه به دست می‌آید) نسبت به مدار کوانتومی اولیه افزایش می‌یافت، در [۲۳] راهکاری به منظور کاهش کیوبیت کمکی در مدار ثانویه پیشنهاد گردید. اسلامی و همکاران در [۲۴] این ایده را بهبود دادند و روش جدیدی به منظور بهینه‌سازی الگوهای 1WQC حاصل از مدار کوانتومی ارائه کردند که بر خلاف روش‌های گذشته از هیچ یک از قوانین بازنویسی به منظور ساده‌سازی الگو استفاده نمی‌کند و سعی می‌کند که تنها با بررسی گراف درهم‌تنیدگی الگو به همراه مجموعه کیوبیت‌های ورودی و خروجی الگو (هندسه الگو)، تکنیک‌های بهینه‌سازی را روی الگوی مربوط اعمال کند. پس از اجرای عملیات بهینه‌سازی، الگوی مربوط مجدداً به مدار کوانتومی، تبدیل و با کاهش کیوبیت‌های کمکی ساده‌تر می‌شود.

هوشمند و همکاران در [۱۴] مسأله سنتز را در مدل 1WQC به طور رسمی به صورت استخراج یک الگوی اندازه‌گیری از یک ماتریس یکانی دلخواه ورودی، تعریف و سپس روشی برای سنتز الگوهای 1WQC ارائه کرده‌اند. در این مقاله، دو روش مشهور سنتز مدارهای کوانتومی CSD [۲۵] و QSD [۶] در نظر گرفته شده و با هدف بهبود معیارهای الگوهای اندازه‌گیری 1WQC به کتابخانه CZ و J نگاشت می‌شوند. مجموعه جواب ترکیب این دو روش در یک روش بالا به پایین برنامه‌ریزی پویا، کاوش می‌شود و یک روش سنتز چندهدفه برای استخراج الگوهای اندازه‌گیری 1WQC ارائه می‌شود که معیارهای اندازه‌گیری الگو را پس از ترجمه از مدارهای کوانتومی بهبود می‌بخشد. از آنجایی که یکی از نقاط ضعف در مدل 1WQC تعداد زیاد کیوبیت‌های کمکی مورد نیاز در محاسبات است در [۲۶] روشی ارائه شده که بتوان وضعیت گرافی را مرحله به مرحله در حین محاسبات ایجاد کرد و تعداد کمینه کیوبیت‌های مورد نیاز باید برای تحقق یک محاسبه 1WQC مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴- روش پیشنهادی

در این بخش، روشی ارائه شده که با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته که در ادامه معرفی می‌شود، برای حالت کلی گیت‌های کنترل‌شده به الگویی با معیارهای بهتری دست می‌یابد. نشان داده می‌شود گیت‌های قطری دلخواه[3] با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته می‌توانند به طور مستقیم و به صورت بهبودیافته به الگوهای اندازه‌گیری اضافه شوند. لذا در روش پیشنهادی از تجزیه‌ای برای گیت‌های یکانی کنترل‌شده استفاده می‌گردد که گیت‌های قطری ظاهر شوند [۶] و سپس با استفاده از روش پیشنهادی پس از سنتز به الگوهای اندازه‌گیری 1WQC، بتوانند به معیارهای ارزیابی بهتری برای الگو منجر شوند.

اندازه‌گیری که در زیربخش ۲-۱ آمده است، اندازه‌گیری در صفحه (X,Y) است و به عبارت دیگر اندازه‌گیری‌ای که با تصویرکردن متعامد در پایه $\left|\pm\alpha^{(X,Y)}\right\rangle = (۱/\sqrt{۲})(|۰\rangle \pm e^{i\alpha}|۱\rangle)$ انجام می‌شود.

حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته[4] امکان اندازه‌گیری در صفحات (X,Z) و (Y,Z) را علاوه بر صفحه (X,Y) می‌دهد [۲۶]. در ادامه عملیات این حساب معرفی شده است:

- قراردادن کیوبیت‌های کمکی در حالت $|+\rangle$
- ایجادکردن درهم‌تنیدگی‌ها با اعمال CZ
- اندازه‌گیری تک‌کیوبیتی $M_i^{\lambda,\alpha}$ که $\lambda \in \{(X,Y),(Y,Z),(X,Z)\}$
- و تصحیحات تک‌کیوبیتی پائولی X_i و Z_i

1. Universality
2. Quantum Carry-Lookahead Adder

۳. یک ماتریس یکانی قطری روی n کیوبیت می‌تواند به صورت $\sum_{i=۰}^{۲^n-۱} \lambda_i |i\rangle\langle i|$ نمایش داده شود که λ_i ها مقادیر ویژه این ماتریس هستند و $|\lambda_i| = ۱$.
4. Extended Measurement Calculus

اندازه‌گیری در صفحات (Y,Z) و (X,Z) به ترتیب با تصویرگرهای (۲۰) معرفی می‌شوند

$$\begin{aligned}\left|+\alpha^{(Y,Z)}\right\rangle &= \cos\frac{\alpha}{2}\left|0\right\rangle + i\sin\frac{\alpha}{2}\left|1\right\rangle\\ \left|-\alpha^{(Y,Z)}\right\rangle &= \sin\frac{\alpha}{2}\left|0\right\rangle - i\cos\frac{\alpha}{2}\left|1\right\rangle\\ \left|+\alpha^{(X,Z)}\right\rangle &= \cos\frac{\alpha}{2}\left|0\right\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}\left|1\right\rangle\\ \left|-\alpha^{(X,Z)}\right\rangle &= \sin\frac{\alpha}{2}\left|0\right\rangle - \cos\frac{\alpha}{2}\left|1\right\rangle\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

اگرچه در [۲۷] این حساب اندازه‌گیری معرفی گردیده، بهینه‌سازی‌های مربوط به آن معرفی نشده است. از آنجا که در سنتز 1WQC این بهینه‌سازی‌ها مورد استفاده قرار خواهد گرفت در ادامه، بهینه‌سازی‌های مربوط به اندازه‌گیری (Y,Z) را ارائه می‌کنیم.

دستورات استانداردسازی، (روابط (۶) تا (۸)) مشابه با صفحه (X,Y) در این صفحه نیز می‌توانند اعمال شوند.

با استفاده از (۲۱) و (۲۲) [۲۹]

$$M_i^{(Y,Z),\alpha} X_i = M_i^{(Y,Z),\alpha-\pi} \qquad (۲۱)$$

$$M_i^{(Y,Z),\alpha} Z_i = M_i^{(Y,Z),-\alpha+\pi} \qquad (۲۲)$$

اندازه‌گیری‌های وابسته (Y,Z) را به صورت (۲۳) تعریف می‌کنیم

$${}^t[M_i^{(Y,Z),\alpha}]^s := M_i^{(Y,Z),\alpha} X_i Z_i := M_i^{(Y,Z),\alpha(-1)^t(\alpha-s\pi)+t\pi} \qquad (۲۳)$$

قضیه ۱: با دستورات انتقال سیگنال، تصحیح‌های X در اندازه‌گیری‌های (Y,Z) می‌توانند به انتهای الگو منتقل شوند.

اثبات: با استفاده از (۱۸) و روابط $\sin((\alpha-\pi)/2) = -\cos(\alpha/2)$ و $\cos((\alpha-\pi)/2) = \sin(\alpha/2)$، به سادگی می‌توان دید

$$\left\{\left|+\alpha-\pi^{(Y,Z)}\right\rangle, \left|+\alpha-\pi^{(Y,Z)}\right\rangle\right\} = \left\{\left|-\alpha^{(Y,Z)}\right\rangle, \left|+\alpha^{(Y,Z)}\right\rangle\right\}$$

لذا از آنجایی که عمل تصحیح X، اندازه‌گیری‌ها را تغییر نمی‌دهد و به معنای معکوس‌کردن نتیجه خروجی است، با معرفی دستور انتقال سیگنال S_i^t طبق (۲۴) تا (۲۸) وابستگی‌های X می‌توانند به انتهای الگو منتقل شوند

$${}^t[M_i^{(Y,Z)\alpha}]^s \Rightarrow S_i^s\, {}^t[M_i^{(Y,Z)\alpha}] \qquad (۲۴)$$

$${}^t[M_i^{(Y,Z)\alpha}]^s S_i^r \Rightarrow S_i^{r\,t[(r+s_i)/s_i]}[M_i^{(Y,Z)\alpha}]^{s[(r+s_i)/s_i]} \qquad (۲۵)$$

$$X_j^s S_i^r \Rightarrow S_i^r X_j^{s[(r+s_i)/s_i]} \qquad (۲۶)$$

$$Z_j^s S_i^r \Rightarrow S_i^r Z_j^{s[(r+s_i)/s_i]} \qquad (۲۷)$$

$$S_i^s S_j^t \Rightarrow S_j^t S_i^{s[(t+s_j)/s_j]} \qquad (۲۸)$$

که در آن $s[(r+s_i)/s_i]$ نشان‌دهنده جابه‌جایی s_i با $r+s_i$ در سیگنال s می‌باشد. ■

در یک الگوی با سیگنال منتقل‌شده، دستورات تصحیح X تنها بر روی کیوبیت‌های خروجی اعمال می‌شوند.

قضیه ۲: اگر زاویه اندازه‌گیری صفر باشد، عمل تصحیح Z در اندازه‌گیری‌های (Y,Z) می‌تواند به عمل تصحیح X تبدیل شود و سپس با دستورات انتقال سیگنال به انتهای الگو منتقل گردد.

اثبات: اگر زاویه اندازه‌گیری صفر باشد، در عمل تصحیح Z با استفاده از (۲۱) و (۲۲) داریم

$$M_i^{(Y,Z),0} Z_i = M_i^{(Y,Z),\pi} = M_i^{(Y,Z),-\pi} = M_i^{(Y,Z),0} X_i \qquad (۲۹)$$

لذا اگر زاویه اندازه‌گیری صفر باشد، عمل تصحیح Z می‌تواند به عمل تصحیح X تبدیل شود و عمل تصحیح X نیز می‌تواند با روابط انتقال سیگنال (روابط (۱۹) تا (۲۲)) به انتهای الگو منتقل گردد. ■

در ادامه روشی ارائه می‌شود که با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته برای حالت کلی گیت‌های یکانی کنترل‌شده به الگویی با معیارهای بهتری دست می‌یابد. بدین منظور در ابتدا روش سنتزی برای گیت‌های یکانی تک‌کیوبیتی با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته معرفی می‌شود.

لم ۱: الگوی $P=\{\{1,2\},\{1\},\{1\},Z_1^{S_2}M_2^{(Y,Z),\theta}E_{1,2}\}$، گیت $R_z(\theta)$ را محقق می‌سازد.

اثبات: قابل ذکر است آماده‌سازی N_2 نشان داده نشده است چون این عمل همواره روی تمام کیوبیت‌های غیر ورودی اعمال می‌شود. اگر حالت اولیه کیوبیت اول $\alpha\left|0\right\rangle+\beta\left|1\right\rangle$ باشد، پس از اعمال گیت CZ بر روی دو کیوبیت، حالت سیستم به صورت (۳۰) خواهد بود

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\left|+\right\rangle+\beta\left|-\right\rangle) \qquad (۳۰)$$

حال، کیوبیت دوم را در پایه $\left\langle \pm\theta^{(Y,Z)}\right|$ اندازه‌گیری می‌کنیم. اندازه‌گیری ممکن است دو خروجی داشته باشد که هر کدام با احتمال مساوی رخ می‌دهند. اگر خروجی اندازه‌گیری صفر باشد، کیوبیت اول به حالت (۳۱) می‌رود

$$\begin{aligned}&\alpha(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})\left|0\right\rangle+\beta(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})\left|1\right\rangle=\\ &\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}\left|0\right\rangle+\beta e^{i\frac{\theta}{2}}\left|1\right\rangle\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

و اگر نتیجه اندازه‌گیری یک باشد، کیوبیت اول به حالت (۳۲) می‌رود

$$\begin{aligned}&-i\alpha(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})\left|0\right\rangle-i\beta(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})\left|1\right\rangle=\\ &-i\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}\left|0\right\rangle+i\beta e^{-i\frac{\theta}{2}}\left|1\right\rangle=-i(\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}\left|0\right\rangle-\beta e^{i\frac{\theta}{2}}\left|1\right\rangle)\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

با اعمال گیت Z روی این کیوبیت معادل حالت $\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}\left|0\right\rangle+\beta e^{i\frac{\theta}{2}}\left|1\right\rangle$ می‌شود. لذا این الگو، گیت $R_z(\theta)$ را محقق می‌سازد. ■

قضیه ۳: با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته، هر گیت تک‌کیوبیتی با یک الگوی 1WQC با گراف درهم‌تنیدگی با اندازه ۴، عمق ۵ و تعداد درهم‌تنیدگی برابر با ۳ قابل پیاده‌سازی است.

اثبات: با در نظر گرفتن تجزیه اویلری گیت تک‌کیوبیتی U به صورت (۳۳) [۲]

$$U=e^{i\delta}R_z(\alpha)R_y(\theta)R_z(\beta) \qquad (۳۳)$$

در کلی‌ترین حالت تجزیه به صورت (۳۴) برای این گیت برقرار خواهد بود [۲۹]

$$U=e^{i(\delta-\frac{\alpha+\beta+\theta}{2})}J(0)J(\alpha+\frac{\pi}{2})J(\theta)J(\beta-\frac{\pi}{2}) \qquad (۳۴)$$

یا به عبارت دیگر

$$U=e^{i\delta'}R_z(\alpha')J(\theta)J(\beta') \qquad (۳۵)$$

که $\delta' = \delta - (\beta + \theta + \pi/2)$، $\alpha' = \alpha + (\pi/2)$ و $\beta' = \beta - (\pi/2)$ است. از طرف دیگر با استفاده از لم ۱، با الگوی (۳۶) می‌توان گیت $R_z(\theta)$ را محقق ساخت

$$P = \{\{1,2\},\{1\},\{1\}, Z_1^{s_2} M_2^{(Y,Z),\theta} E_{1,2}\} \tag{36}$$

حال با ترکیب الگوهای مربوط به گیت‌ها (۳۷) را خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P' = {} & Z_3^{s_4} M_4^{(Y,Z),\alpha'} E_{3,4} X_3^{s_2} M_2^{(X,Y),-\theta} \\ & E_{2,3} X_2^{s_1} M_1^{(X,Y),-\beta'} E_{1,2} \end{aligned} \tag{37}$$

با استفاده از (۶) تا (۸) دستورهای درهم‌تنیدگی به سمت راست دیگر دستورهای درهم‌تنیدگی طبق (۳۸) منتقل می‌شود

$$\begin{aligned} P' = {} & X_3^{s_2} M_4^{(Y,Z),\alpha'} Z_4^{s_2} M_2^{(X,Y),-\theta} Z_3^{s_1} X_2^{s_1} M_1^{(X,Y),-\beta'} \\ & E_{3,4} E_{2,3} E_{1,2} \end{aligned} \tag{38}$$

با ترکیب دستورهای تصحیح و اندازه‌گیری روی کیوبیت ۱ و همچنین قوانین جابه‌جایی دستورات تصحیح (روابط (۹) و (۱۰)) داریم

$$\begin{aligned} P' = {} & X_3^{s_2} Z_3^{s_1} M_4^{(Y,Z),\alpha'} Z_4^{s_2} [M_2^{(X,Y),-\theta}]^{s_1} M_1^{(X,Y),-\beta'} \\ & E_{3,4} E_{2,3} E_{1,2} \end{aligned} \tag{39}$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$P' = \left\{ \begin{aligned} & \{1,2,3,4\},\{1\},\{3\}, \\ & X_3^{s_2} Z_3^{s_1}\ {}^{s_2}[M_4^{(Y,Z),\alpha'}][M_2^{(X,Y),-\theta}]^{s_1} M_1^{(X,Y),-\beta'} E_{1,2,3,4} \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

که $E_{1,2,3,4}$ به طور خلاصه $E_{3,4}E_{2,3}E_{1,2}$ را نشان می‌دهد. اندازه الگوی فوق به علت این که در الگو ۴ کیوبیت وجود دارد برابر با ۴ است. عمق آماده‌سازی‌اش ۲ و عمق محاسبات کوانتومی آن به علت وابستگی‌های $4 \to 2 \to 1$ برابر با ۳ است. لذا عمق این الگو برابر با ۵ است و این الگو، سه درهم‌تنیدگی دارد. ■

در ادامه، ایده پیشنهادی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده با استفاده از مفهوم حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته مطرح می‌شود. بدین منظور، در ابتدا استفاده از روش سنتز متفاوتی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده پیشنهاد می‌گردد. در [۶] نشان داده شده که هر گیت یکانی کنترل‌شده می‌تواند به صورت (۴۱) تجزیه شود

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \tag{41}$$

ماتریس‌های V و Δ به صورت (۴۲) از U_1 و U_2 به دست می‌آیند

$$U_1 U_2^\dagger = V \Delta^2 V^\dagger \tag{42}$$

Δ و V می‌توانند از U_1 و U_2 با روش استاندارد قطری‌سازی [۱] استخراج شوند و همچنین $W = \Delta V^\dagger U_2$ است.

لم ۲: گیت میانی (۴۱) می‌تواند به صورت $e^{-i\frac{\theta_1}{2}(Z\otimes I)} e^{-i\frac{\theta_2}{2}(Z\otimes Z)}$ نوشته شود.

اثبات: گیت میانی (۴۱)، یک گیت قطری دو کیوبیتی به صورت $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D^\dagger \end{bmatrix}$ است. مشخص است هر گیت کوانتومی به این شکل می‌تواند به صورت (۴۳) نوشته شود

$$e^{-\frac{ia}{2}}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{ib}{2}}|1\rangle\langle 1| + e^{\frac{ia}{2}}|2\rangle\langle 2| + e^{-\frac{ib}{2}}|3\rangle\langle 3| \tag{43}$$

با جایگزین‌کردن a با $\theta_1 + \theta_2$ و b با $\theta_2 - \theta_1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{ia}{2}}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{ib}{2}}|1\rangle\langle 1| + e^{\frac{ia}{2}}|2\rangle\langle 2| + e^{-\frac{ib}{2}}|3\rangle\langle 3| = \\ & e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{i}{2}(\theta_2-\theta_1)}|1\rangle\langle 1| + \\ & e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}|2\rangle\langle 2| + e^{\frac{i}{2}(\theta_1-\theta_2)}|3\rangle\langle 3| \end{aligned} \tag{44}$$

نشان می‌دهیم هر چنین گیتی می‌تواند به صورت $e^{-i\frac{\theta_1}{2}(Z\otimes I)} e^{-i\frac{\theta_2}{2}(Z\otimes Z)}$ نوشته شود (رابطه (۴۵))

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{i}{2}(\theta_2-\theta_1)}|1\rangle\langle 1| + \\ & e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}|2\rangle\langle 2| + e^{\frac{i}{2}(\theta_1-\theta_2)}|2\rangle\langle 2| = \\ & (e^{-\frac{i\theta_1}{2}}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{i\theta_1}{2}}|1\rangle\langle 1| + e^{\frac{i\theta_1}{2}}|2\rangle\langle 2| + e^{\frac{i\theta_1}{2}}|3\rangle\langle 3|) \\ & (e^{-\frac{i\theta_2}{2}}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{i\theta_2}{2}}|1\rangle\langle 1| + e^{\frac{i\theta_2}{2}}|2\rangle\langle 2| + e^{\frac{-i\theta_2}{2}}|3\rangle\langle 3|) \\ & = e^{-i\frac{\theta_1}{2}(Z\otimes I)} e^{-i\frac{\theta_2}{2}(Z\otimes Z)} \end{aligned} \tag{45}$$

لم ۳: هر گیت به شکل $e^{-i\frac{\theta}{2}(Z\otimes Z)}$ با الگویی به صورت (۴۶) قابل پیاده‌سازی است

$$e^{-\frac{ia}{2}}|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{ib}{2}}|1\rangle\langle 1| + e^{\frac{ia}{2}}|2\rangle\langle 2| + e^{-\frac{ib}{2}}|3\rangle\langle 3| \tag{46}$$

آماده‌سازی N_2 نشان داده نشده است چون این عمل همواره روی تمام کیوبیت‌های غیر ورودی اعمال می‌شود.

اثبات: اگر $a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$، حالت اولیه کیوبیت‌های ورودی باشد، پس از اعمال گیت CZ بر روی سه کیوبیت، حالت سیستم به صورت (۴۷) خواهد بود

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle|+\rangle|0\rangle + b|0\rangle|-\rangle|0\rangle + c|1\rangle|-\rangle|0\rangle + d|1\rangle|+\rangle|1\rangle) \tag{47}$$

حال، کیوبیت دوم را در پایه $\langle \pm\theta^{(Y,Z)}|$ اندازه‌گیری می‌کنیم. اندازه‌گیری ممکن است دو خروجی داشته باشد که هر کدام با احتمال مساوی رخ می‌دهند (محاسبات جزئی‌تر در پیوست آمده است). اگر خروجی اندازه‌گیری صفر باشد، کیوبیت‌های اول و سوم (خروجی) به حالت (۴۸) می‌روند

$$\begin{aligned} & a(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2})|00\rangle + b(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})|01\rangle + \\ & c(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})|10\rangle + d(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2})|11\rangle = \\ & ae^{-i\frac{\theta}{2}}|00\rangle + be^{i\frac{\theta}{2}}|01\rangle + ce^{i\frac{\theta}{2}}|10\rangle + de^{-i\frac{\theta}{2}}|11\rangle \end{aligned} \tag{48}$$

و اگر نتیجه اندازه‌گیری ۱ باشد، کیوبیت‌های اول و سوم (خروجی) به حالت (۴۹) می‌روند

جدول ۱: مقایسه حداکثر معیارهای الگو برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده با روش‌های قبلی.

روش مورد استفاده	اندازه	عمق	تعداد درهم‌تنیدگی
روش پیشنهادی	۱۰	۸	۹
روش [۲۲]	۱۴	۱۰	۱۴
روش [۱۴]	۱۱	۱۰	۱۱

جدول ۲: مقایسه درصد بهبود روش پیشنهادی نسبت به روش‌های قبلی در سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده.

روش مورد استفاده	اندازه	عمق	تعداد درهم‌تنیدگی
بهبود نسبت به روش [۲۲]	٪۲۸/۵	٪۲۸/۵	٪۳۵/۷
بهبود نسبت به روش [۱۴]	٪۹/۱	٪۲۸/۵	٪۱۸/۱

$$\begin{aligned} &ia(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۰۰\rangle-ib(\cos\frac{\theta}{۲}+i\sin\frac{\theta}{۲})|۰۱\rangle-\\ &ic(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۱۰\rangle+id(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۱۱\rangle=\\ &-iae^{-i\frac{\theta}{۲}}|۰۰\rangle+ibe^{i\frac{\theta}{۲}}|۰۱\rangle-ice^{i\frac{\theta}{۲}}|۱۰\rangle-ide^{-i\frac{\theta}{۲}}|۱۱\rangle \end{aligned} \tag{۴۹}$$

لذا دستور تصحیح $Z_۱^{s_۲}Z_۲^{s_۲}$ کیوبیت‌های خروجی را در حالت دوم تصحیح می‌کند و در نتیجه، این الگو گیت $e^{-i\frac{\theta}{۲}(Z\otimes Z)}$ را محقق می‌سازد. ■

قضیه ٤: هر گیت یکانی کنترل‌شده با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته با الگویی با اندازه ۱۰ و عمقی برابر با ۷ قابل پیاده‌سازی است و همچنین تعداد درهم‌تنیدگی‌های این الگو ۹ می‌باشد.

اثبات: در (۴۱) گیت‌های V و W گیت‌های تک‌کیوبیتی هستند که طبق (۴۰) شکل‌های کلی به‌ترتیب الگوهای (۵۰) و (۵۱) را دارند

$$P_v=\left\{\begin{array}{l}\{۱,۲,۳,۴\},\{۱\},\{۳\},X_۳^{s_۲}Z_۳^{s_۱}\\ {}^{s_۲}[M_۴^{(Y,Z),\gamma}][M_۲^{(X,Y),\beta}]^{s_۱}M_۱^{(X,Y),\alpha}E_{۱,۲,۳,۴}\end{array}\right\} \tag{۵۰}$$

$$P_w=\left\{\begin{array}{l}\{۱,۲,۳,۴\},\{۱\},\{۳\},X_۳^{s_۲}Z_۳^{s_۱}\\ {}^{s_۲}[M_۴^{(Y,Z),\gamma'}][M_۲^{(X,Y),\beta'}]^{s_۱}M_۱^{(X,Y),\alpha'}E_{۱,۲,۳,۴}\end{array}\right\} \tag{۵۱}$$

به طریق مشابه با لم ۳ می‌توان نشان داد الگوی (۵۲) گیت $e^{-i\frac{\theta}{۲}(Z\otimes I)}$ را پیاده می‌کند (اثبات در پیوست آماده است)

$$P=\{\{۱,۲,۳\},\{۱,۳\},\{۱,۳\},Z_۳^{s_۲}M_۲^{(Y,Z),\theta}E_{۱,۲}\} \tag{۵۲}$$

با ترکیب الگوها، الگوی (۵۳) را برای گیت یکانی کنترل‌شده داریم

$$\begin{aligned} P'=\;&X_۹^{s_۸}Z_۹^{s_۳}\,{}^{s_۸}[M_{۱۰}^{(Y,Z),\gamma'}][M_۸^{(X,Y),\beta'}]^{s_۳}M_۳^{(X,Y),\alpha'}\\ &E_{۹,۱۰}E_{۸,۹}E_{۳,۸}Z_۶^{s_۷}M_۷^{(Y,Z),\theta_۲}E_{۳,۷}Z_۶^{s_۵}Z_۳^{s_۵}M_۵^{(Y,Z),\theta_۱}\\ &E_{۵,۶}E_{۳,۵}X_۳^{s_۲}Z_۳^{s_۱}\,{}^{s_۲}[M_۴^{(Y,Z),\gamma'}][M_۲^{(X,Y),\beta'}]^{s_۱}M_۱^{(X,Y),\alpha'}\\ &E_{۳,۴}E_{۲,۳}E_{۱,۲} \end{aligned} \tag{۵۳}$$

در نهایت با استفاده از (۶) تا (۱۸) (روابط بهینه‌سازی الگو) به الگوی (۵۴) می‌رسیم

$$\begin{aligned} P'=\{&\{۱,۲,\ldots,۱۰\},\{۶,۱\},\{۶,۹\},\\ &X_۹^{s_۲+s_۸}Z_۹^{s_۱+s_۳+s_۵}Z_۶^{s_۵+s_۷}\\ &{}^{s_۲+s_۸}[M_{۱۰}^{(Y,Z),\gamma'}][M_۸^{(X,Y),\beta'}]^{s_۳}\,{}^{s_۲}[M_۷^{(Y,Z),\theta_۲}]^{s_۲}[M_۵^{(Y,Z),\theta_۱}]\\ &{}^{s_۲}[M_۴^{(Y,Z),\gamma'}][M_۳^{(X,Y),\alpha'}]^{s_۲}[M_۲^{(X,Y),\beta'}]^{s_۱}M_۱^{(X,Y),\alpha'}\\ &E_{۹,۱۰}E_{۸,۹}E_{۳,۸}E_{۳,۷}E_{۵,۶}E_{۳,۵}E_{۳,۴}E_{۲,۳}E_{۱,۲}\} \end{aligned} \tag{۵۴}$$

از آنجایی که ده کیوبیت در این الگو وجود دارد، اندازه آن ۱۰ است. عمق محاسبات کوانتومی آن به علت وابستگی‌های $۱۰\to ۸\to ۳\to ۲\to ۱$ برابر با ۵ می‌باشد. عمق آماده‌سازی این الگو ۳ است و لذا عمق این الگو برابر با ۸ است. به سادگی قابل بررسی است این الگو ۹ درهم‌تنیدگی دارد. ■

۵- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج حاصل از اعمال روش پیشنهادی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده بیان می‌شود. جدول ۱ حداکثر معیارهای الگو (اندازه الگو، عمق الگو و تعداد درهم‌تنیدگی) را با سه کتابخانه پیشنهادی مختلف برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده مقایسه می‌کند. همان گونه که این جدول نشان می‌دهد، روش‌های پیشنهادی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده، معیارهای الگو را نسبت به روش‌های [۲۲] و [۱۴] بهبود می‌بخشد. این امر به این علت است که نشان داده شد گیت‌های قطری دلخواه با استفاده از اندازه‌گیری در صفحه $(Y-Z)$ می‌توانند به طور مستقیم و به صورت بهبودیافته به الگوهای اندازه‌گیری اضافه شوند. لذا در روش پیشنهادی از سنتزی برای گیت‌های یکانی کنترل‌شده استفاده گردید که گیت‌های قطری ظاهر شوند و سپس با استفاده از روش پیشنهادی پس از سنتز به الگوهای اندازه‌گیری 1WQC بتوان به معیارهای بهتری از ارزیابی الگو رسید. جدول ۲ میزان درصد بهبود روش پیشنهادی را نسبت به دو روش مهم قبلی در سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده [۲۲] و [۱۴] نشان می‌دهد. اگر مقدار به دست آمده برای معیارهای ارزیابی در روش پیشنهادی را x و مقدار مربوط را در پژوهش‌های پیشین y بنامیم، درصد بهبود روش پیشنهادی از رابطه $((y-x)/y)\times ۱۰۰$ به دست می‌آید. همان گونه که جدول ۲ نشان می‌دهد روش پیشنهادی برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده، معیارهای ارزیابی اندازه، عمق و تعداد درهم‌تنیدگی‌های الگو را در این مدل نسبت به بهترین کار قبلی به ترتیب به میزان ٪۹/۱، ٪۳۰ و ٪۱۸/۱ بهبود می‌دهد.

همان طور که گفته شد به مجموعه گیت‌های یکانی کنترل‌شده در محاسبات کوامتومی و گیت‌های تک‌کیوبیتی مجموعه گیت‌های ابتدایی می‌گویند و سنتز آنها در محاسبات کوانتومی حایز اهمیت است. یک روش بهبودیافته برای سنتز گیت‌های یکانی کنترل‌شده می‌تواند به سنتز بهبودیافته گیت‌های کوانتومی دلخواه نیز منجر شود.

قابل ذکر است هر اندازه‌گیری در پایه غیر محاسباتی (پایه غیر Z) می‌تواند با اعمال یک گیت تک‌کیوبیتی به یک اندازه‌گیری در پایه Z تبدیل شود [۱]. لذا استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته [۲۷] (که امکان اندازه‌گیری در صفحه‌های مختلف کره بلاخ را می‌دهد)، هزینه اضافه‌تری تحمیل نمی‌کند.

از آنجا که سیستم‌های کوانتومی بیشتر از محاسبات کلاسیک در معرض خطا هستند، مدارهای کوانتومی تحمل‌پذیر اشکال برای پیاده‌سازی عملی مورد نیاز هستند. بسیاری از کدهای تصحیح خطای کوانتومی [۲۸] تا [۳۰] برای ممکن‌ساختن محاسبات تحمل‌پذیر اشکال ارائه شده‌اند که از گیت‌های کتابخانه حاوی گیت‌های کلیفورد[۱] و T استفاده می‌کنند. برخی پژوهش‌های اخیر در حوزه سنتز کوانتومی، به سنتز کوانتومی با هدف تحمل‌پذیری اشکال می‌پردازند. در این پژوهش‌ها [۳۱] تا [۳۴] سنتز مدارات کوانتومی عمدتاً با استفاده از کتابخانه گیت‌های کلیفورد و T

۱. به مجموعه گیت‌های Z، CNOT، هادامارد و فاز، گیت‌های کلیفورد گفته می‌شود.

صورت می‌گیرند. با شبیه‌سازی گیت‌های تحمل‌پذیر اشکال مدارات کوانتومی در مدل ۱WQC، گیت‌های یکانی کنترل‌شده تحمل‌پذیر اشکال کوانتومی در این مدل می‌توانند محقق شوند. همچنین در [۳۴] با ارائه تغییراتی در مدل ۱WQC استاندارد، روش مستقیمی برای پیاده‌سازی تحمل‌پذیر اشکال مدل ۱WQC ارائه گردیده که می‌تواند در روش ارائه‌شده در این مقاله نیز مورد استفاده قرار گیرد.

۶- جمع‌بندی

مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه از جمله مدل‌های محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری است که راه را جهت ساخت کامپیوترهای کوانتومی هموار می‌سازد. این روش یکی از نویدبخش‌ترین مدل‌ها به منظور پیاده‌سازی فیزیکی و ساخت کامپیوترهای کوانتومی است. در این مقاله، مفهوم استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته در مسأله سنتز ۱WQC برای نخستین بار مورد استفاده قرار گرفت. بهینه‌سازی‌هایی مرتبط با این حساب معرفی شدند و سپس روش سنتزی مبتنی بر حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته برای گیت‌های یکانی کنترل‌شده پیشنهاد گردید که معیارهای ارزیابی اندازه، عمق و تعداد درهم‌تنیدگی‌های الگو را در این مدل نسبت به بهترین کار قبلی به ترتیب به میزان ۹٫۱٪، ۳۰٪ و ۱۸٫۱٪ بهبود داد. در ادامه می‌توان روشی بهبودیافته برای سنتز ماتریس‌های یکانی دلخواه با استفاده از حساب اندازه‌گیری تعمیم‌یافته ارائه داد.

پیوست

اندازه‌گیری کوانتومی [۱] با یک مجموعه از بردارهای پایه اندازه‌گیری $\{|a_i\rangle, ۰ \le i \le m\}$، مشخص و عملگرهای اندازه‌گیری[۱] $\{M_i, ۰ \le i \le m\}$ به صورت $|a_i\rangle\langle a_i|$ تعریف می‌شوند. این عملگرها روی فضای حالت سیستمی که قرار است اندازه‌گیری شود اعمال می‌گردند. اندیس عملگرها (i) خروجی اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. اگر حالت سیستم کوانتومی قبل از اندازه‌گیری $\langle\psi|$ فرض شود، احتمال این که بعد از اندازه‌گیری نتیجه i به دست آید از (پ-۱) محاسبه می‌شود

$$p(i) = \langle\psi|M_i|\psi\rangle \qquad \text{(پ-۱)}$$

اگر نتیجه i به دست آید، حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری نیز به (پ-۲) جهش[۲] می‌کند

$$\frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i|\psi\rangle}} \qquad \text{(پ-۲)}$$

عملگرهای اندازه‌گیری، رابطه کامل‌بودن[۳] را ارضا می‌کنند. این رابطه تضمین می‌کند که مجموع احتمال‌های خروجی‌های مختلف اندازه‌گیری مساوی با یک خواهد بود (رابطه (پ-۳))

$$۱ = \sum_i p(i) = \sum_i \langle\psi|M_i|\psi\rangle = \sum_i \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle \qquad \text{(پ-۳)}$$

قابل ذکر است در (پ-۳) از ویژگی $M_i^\dagger M_i = M_i^۲ = M_i$ [۱] استفاده شده است.

بسیاری از ویژگی‌های ۱WQC می‌توانند با یک مثال ساده تشریح شوند. گیت $J(\theta)$ در ۱WQC کاربردهای زیادی دارد و به صورت (پ-۴) تعریف می‌شود

$$J(\theta) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & e^{i\theta} \\ ۱ & -e^{i\theta} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۴)}$$

تأثیر گیت بر روی کیوبیت ورودی $\alpha|۰\rangle + \beta|۱\rangle$ به صورت $\alpha|+\rangle + e^{i\theta}\beta|-\rangle$ است.

الگوی اندازه‌گیری گیت $J(\theta)$، $P = \{\{۱,۲\},\{۱\},\{۲\}, X_۲^{s_۱} M_۱^{-\theta} E_{۱,۲}\}$ است که در آن عمل آماده‌سازی $N_۲$ نشان داده نشده است چون این عمل همواره روی تمام کیوبیت‌های غیر ورودی اعمال می‌شود. اگر حالت اولیه کیوبیت اول $\alpha|۰\rangle + \beta|۱\rangle$ باشد، پس از اعمال گیت CZ بر روی دو کیوبیت، حالت سیستم به صورت (پ-۵) خواهد بود

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\alpha|۰\rangle|+\rangle + \beta|۱\rangle|-\rangle) \qquad \text{(پ-۵)}$$

حال نخستین کیوبیت را در پایه $\langle\pm(-\theta)|$ اندازه‌گیری می‌کنیم. اندازه‌گیری ممکن است دو خروجی داشته باشد که با استفاده از (پ-۱) هر کدام با احتمال مساوی رخ می‌دهند. اگر خروجی اندازه‌گیری صفر باشد، با استفاده از (پ-۲) کیوبیت دوم به حالت $\alpha|+\rangle + e^{i\theta}\beta|-\rangle$ جهش شده و اگر نتیجه اندازه‌گیری یک باشد، کیوبیت دوم به حالت $\alpha|+\rangle + e^{i\theta}\beta|-\rangle$ جهش می‌شود. لذا اعمال $X_۲^{s_۱}$ که $s_۱$ نتیجه حاصل از اندازه‌گیری روی کیوبیت اول است، کیوبیت دوم را تصحیح می‌کند و گیت $J(\theta)$ محقق می‌شود.

لم ٤: الگوی (پ-۶) گیت $e^{-i\frac{\theta}{۲}(Z\otimes I)}$ را پیاده می‌کند

$$P = \{\{۱,۲,۳\},\{۱,۳\},\{۱,۳\}, Z_۳^{s_۲} M_۲^{(Y,Z),\theta} E_{۱,۲}\} \qquad \text{(پ-۶)}$$

اثبات: اگر $a|۰۰\rangle + b|۰۱\rangle + c|۱۰\rangle + d|۱۱\rangle$، حالت اولیه کیوبیت‌های ورودی باشد، پس از اعمال گیت CZ بر روی سه کیوبیت، حالت سیستم به صورت (پ-۷) خواهد بود

$$|\psi\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(a|۰\rangle|+\rangle|۰\rangle + b|۰\rangle|-\rangle|۰\rangle + c|۱\rangle|-\rangle|۰\rangle + d|۱\rangle|+\rangle|۱\rangle) \qquad \text{(پ-۷)}$$

حال، کیوبیت دوم را در پایه $\langle\pm\theta^{(Y,Z)}|$ اندازه‌گیری می‌کنیم. اندازه‌گیری ممکن است دو خروجی ۰ و ۱ داشته باشد که با احتمال‌های (پ-۱) به دست می‌آیند که $M_۰$ و $M_۱$ به فرم (پ-۸) و (پ-۹) محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} M_۰ &= I\otimes(\cos\frac{\alpha}{۲}|۰\rangle + i\sin\frac{\alpha}{۲}|۱\rangle) (\cos\frac{\alpha}{۲}\langle۰| - i\sin\frac{\alpha}{۲}\langle۱|)\otimes I = I\otimes \\ &(\cos^۲\frac{\alpha}{۲}|۰\rangle\langle۰| - i\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}|۰\rangle\langle۱| + \\ &i\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}|۱\rangle\langle۰| + \sin^۲\frac{\alpha}{۲}|۱\rangle\langle۱|)\otimes I \end{aligned} \qquad \text{(پ-۸)}$$

$$\begin{aligned} M_۱ &= I\otimes(\sin\frac{\alpha}{۲}|۰\rangle - i\cos\frac{\alpha}{۲}|۱\rangle) (\sin\frac{\alpha}{۲}\langle۰| + i\cos\frac{\alpha}{۲}\langle۱|)\otimes I = I\otimes \\ &(\sin^۲\frac{\alpha}{۲}|۰\rangle\langle۰| - i\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}|۰\rangle\langle۱| - \\ &i\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}|۱\rangle\langle۰| + \cos^۲\frac{\alpha}{۲}|۱\rangle\langle۱|)\otimes I \end{aligned} \qquad \text{(پ-۹)}$$

1. Measurement Operator
2. Collapse
3. Completeness

که $p(۰)$ و $p(۱)$ (رابطه (پ-۱)) برابر با ۱/۲ محاسبه می‌شوند. اگر خروجی اندازه‌گیری صفر باشد، کیوبیت‌های اول و سوم (خروجی) با استفاده از (پ-۲) به حالت (پ-۱۰) می‌روند

$$a(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۰۰\rangle+b(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۰۱\rangle+$$
$$c(\cos\frac{\theta}{۲}+i\sin\frac{\theta}{۲})|۱۰\rangle+d(\cos\frac{\theta}{۲}+i\sin\frac{\theta}{۲})|۱۱\rangle \quad \text{(پ-۱۰)}$$
$$=ae^{-i\frac{\theta}{۲}}|۰۰\rangle+be^{-i\frac{\theta}{۲}}|۰۱\rangle+ce^{i\frac{\theta}{۲}}|۱۰\rangle+de^{i\frac{\theta}{۲}}|۱۱\rangle$$

و اگر نتیجه اندازه‌گیری ۱ باشد، کیوبیت‌های اول و سوم (خروجی) به استفاده از (پ-۲) به حالت (پ-۱۱) می‌روند

$$a(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۰۰\rangle-b(\cos\frac{\theta}{۲}-i\sin\frac{\theta}{۲})|۰۱\rangle+$$
$$c(\cos\frac{\theta}{۲}+i\sin\frac{\theta}{۲})|۱۰\rangle-d(\cos\frac{\theta}{۲}+i\sin\frac{\theta}{۲})|۱۱\rangle \quad \text{(پ-۱۱)}$$
$$=ae^{-i\frac{\theta}{۲}}|۰۰\rangle-be^{-i\frac{\theta}{۲}}|۰۱\rangle+ce^{i\frac{\theta}{۲}}|۱۰\rangle-de^{i\frac{\theta}{۲}}|۱۱\rangle$$

لذا دستور تصحیح $Z_۳^{s_۲}$ کیوبیت‌های خروجی را در حالت دوم تصحیح می‌کند و در نتیجه، این الگو گیت $e^{-i\frac{\theta}{۲}(Z\otimes I)}$ را محقق می‌سازد. ■

مراجع

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Ed.: Cambridge University Press, 2010.

[2] M. Nakahara and T. Ohmi, *Quantum Computing: from Linear Algebra to Physical Realizations*, 1st Edition, Boca Raton, Taylor & Francis, 2008.

[3] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, Principles of Quantum Computation and Information: Basic Concepts, World Scientific, 2004.

[4] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring," in *Proc. of the 35th Annual Symp. on Foundations of Computer Science, IEEE Conf.*, pp. 124-134, Santa Fe, NM, USA, 20-22 Nov. 1994.

[5] L. K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search," in *Proc. STOC'96 of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 212-219, Philadelphia, PA, USA, 22-24 May 1996.

[6] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," in *Proc. ASP-DAC'05 of the Asia and South Pacific Design Automation Conf.*, pp. 272-275, Shanghai, China, 18-21 Jan. 2005.

[7] D. G. Angelakis, M. Christandl, and A. Ekert, "An introduction to measurement-based quantum computation," *NATO Science Series, III: Computer and Systems Sciences, Quantum Information Processing-from Theory to Experiment*, vol. 199, pp. 137-158, 2006.

[8] H. J. Briegel, D. E. Browne, W. Dur, R. Raussendorf, and M. V. den Nest, "Measurement-based quantum computation," *Nature Physics*, vol. 5, no. 1, pp. 19-26, Jan. 2009.

[9] D. Gottesman and I. Chuang, "Quantum teleportation as a universal computational primitive," *Nature*, vol. 402, pp. 390-393, 1999.

[10] R. Raussendorf and H. J. Briegel, "A one-way quantum computer," *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 22, pp. 5188-5191, 28 May 2001.

[11] P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger, "Experimental one-way quantum computing," *Nature*, vol. 434, no. 7030, pp. 169-176, 10 Mar. 2005.

[12] R. Stock and D. F. V. James, "Scalable, high-speed measurement-based quantum computer using trapped ions," *Physical Review Letters*, vol. 102, no. 17, p. 170501, 1 May 2009.

[13] M. Tame, B. Bell, C. Di Franco, W. Wadsworth, and J. Rarity, "Experimental realization of a one-way quantum computer algorithm solving simon's problem," *Physical Review Letters*, vol. 113, no. 20, p. 200501, 14 Nov. 2014.

[14] M. Houshmand, M. Sedighi, M. Saheb Zamani, and K. Majoei, "Quantum circuit synthesis targeting to improve one-way quantum computation pattern cost metrics," *ACM J. on Emerging Technologies in Computing Systems*, vol. 13, no. 4, Article 55, 11 May 2017.

[15] A. Barenco, C. Bennett, R. Cleve, D. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. Smolin, and H. Weinfurter, "Elementary gates for quantum computation," *Physical Review A*, vol. 52, no. 55, pp. 3457-3467, 1 Nov. 1995.

[16] V. Danos, E. Kashefi, and P. Panangaden, "The measurement calculus," *J. of ACM*, vol. 54, no. 2, Article 8, 2 Apr. 2007.

[17] A. Broadbent and E. Kashefi, "Parallelizing quantum circuits," *Theoretical Computer Science*, vol. 410, no. 26, pp. 2489-2510, 6 Jun. 2009.

[18] E. Pius, Automatic Parallelization of Quantum Circuits Using the Measurement-Based Quantum Computing Mode, M.Sc. Thesis in High-Performance Computing, University of Edinburgh, 2010.

[19] M. Houshmand, M. S. Zamani, M. Sedighi, and M. H. Samavatian, "Automatic translation of quantum circuits to optimized one-way quantum computation patterns," *Quantum Information Processing*, vol. 13, no. 11, pp. 2463-2482, 15Nov. 2014.

[20] V. Danos, E. Kashefi, and P. Panangaden, "Parsimonious and robust realizations of unitary maps in the one-way model," *Physical Review A*, vol. 72, no. 6, p. 064301, 6 Dec. 2005.

[21] A. Trisetyarso and R. V. Meter, "Circuit design for a measurement-based quantum carry-lookahead adder," *International J. of Quantum Information*, vol. 8, no. 5, pp. 843-867, 15 Mar. 2010.

[22] A. Trisetyarso, Theoretical Study towards Realization of Measurement-Based Quantum Computers, Ph.D Thesis, Keio University, 2011.

[23] R. D. da Silva and E. F. Galvao, "Compact quantum circuits from one-way quantum computation," *Physical Review A*, vol. 88, no. 1, p. 012319, 19 Jul. 2013.

[۲۴] م. اسلامی، م. صاحب‌الزمانی، م. صدیقی و م. هوشمند، "بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی با استفاده از مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه مبتنی بر هندسه الگو،" *نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران- ب*، جلد ۱۳، شماره ۴، صص. ۲۳۹-۲۴۸، زمستان ۱۳۹۵.

[25] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Mottonen, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled one-qubit gates," *Physical Review A*, vol. 71, no. 5, pp. 23-30, 27 May 2005.

[26] M. Houshmand, M. Houshmand, and J. F. Fitzsimons, "Minimal qubit resources for the realisation of measurement-based quantum computation," *Physical Review A*, vol. 98, no. 1, p. 012318, 17 Jul. 2018.

[27] V. Danos, E. Kashefi, P. Panangaden, and S. Perdrix, "Extended measurement calculus," *Semantic Techniques in Quantum Computation*, Cambridge University Press, pp. 235-310, 2009.

[28] A. M. Steane, "Error correcting codes in quantum theory," *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 5, p. 793, 29 Jul. 1996.

[29] D. Bacon, "Operator quantum error-correcting subsystems for self-correcting quantum memories," *Physical Review A*, vol. 73, no. 1, p. 012340, Jan. 2006.

[30] M. Houshmand, S. Hosseini-Khayat, and M. M. Wilde, "Minimal-memory, noncatastrophic, polynomial-depth quantum convolutional encoders," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 59, no. 2, pp. 1198-1210, Feb. 2013.

[31] V. Kliuchnikov, D. Maslov, and M. Mosca, "Fast and efficient exact synthesis of single qubit unitaries generated by clifford and T gates," *Quantum Information and Computation*, vol. 13, no. 7-8, pp. 607-630, Jul. 2013.

[32] B. Giles and P. Selinger, "Exact synthesis of multiqubit clifford+T circuits," *Physical Review A*, vol. 87, no. 3, p. 032332, Mar. 2013.

[33] C. C. Lin, A. Chakrabarti, and N. K. Jha, "FTQLS: fault-tolerant quantum logic synthesis," *IEEE Trans. on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 1350-1363, Jul. 2014.

[34] M. Silva, V. Danos, E. Kashefi, and H. Ollivier, "A direct approach to fault-tolerance in measurement-based quantum computation via teleportation," *New J. of Physics*, vol. 9, no. 6, pp. 192-203, Jun. 2007.

محبوبه هوشمند تحصیلات خود را با رتبه ممتاز در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر، گرایش نرم‌افزار به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۹ در دانشگاه فردوسی مشهد به پایان رسانده است. ایشان در سال ۱۳۹۳ مدرک دکترای خود را در رشته مهندسی کامپیوتر، گرایش معماری کامپیوتر از دانشگاه صنعتی امیرکبیر دریافت کرده است. نام‌برده به عنوان دانش‌آموخته برتر دوره دکترا در بنیاد ملی نخبگان معرفی

شد. دکتر هوشمند از آخر شهریورماه سال ۱۳۹۵ به مدت یک سال به عنوان محقق پسادکترا در گروه پژوهشی نظریه و اطلاعات کوانتومی در دانشگاه تکنولوژی و طراحی سنگاپور و هم‌چنین مرکز تکنولوژی‌های کوانتومی در دانشگاه ملی سنگاپور به پژوهش مشغول بود. نام‌برده هم اکنون استادیار گروه مهندسی کامپیوتر در دانشگاه آزاد اسلامی مشهد می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه ایشان شامل مباحث مختلف نظری در حوزه نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی وترکیب این مباحث با حوزه‌های مرتبط با هوش مصنوعی در مهندسی کامپیوتر است.

منیره هوشمند تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا در رشته مهندسی برق، گرایش الکترونیک به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۴، ۱۳۸۶ و ۱۳۹۰ در دانشگاه فردوسی مشهد به پایان رسانده است. دکتر هوشمند دوره پسادکترا در گروه نظریه و اطلاعات کوانتومی در دانشگاه تکنولوژی و طراحی سنگاپور و هم‌چنین مرکز تکنولوژی‌های کوانتومی در دانشگاه ملی سنگاپور به پژوهش مشغول بوده است. نام‌برده هم اکنون استادیار گروه مهندسی برق در دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) مشهد می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه ایشان شامل مباحث مختلف نظری در حوزه نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی است.