

تفکیک‌پذیری مجموعه نقاط دورنگ با مثلث قائم‌الزاویه

زهرا مصلحی و علیرضا باقری

مساحت به شمار می‌رود. به عبارتی مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده با کمترین مساحت، یکی از مثلث‌های تفکیک‌کننده مینیمال خواهد بود که انتخاب آن از بین کلیه مثلث‌های تفکیک‌کننده مینیمال، با پردازش‌های بسیاری روبه‌رو خواهد بود که در انتها به آن اشاره خواهیم کرد.

۱-۱ کارهای مرتبط

یکی از کاربردهای تفکیک‌پذیری هندسی در زمینه دسته‌بندی داده‌های دنیای واقعی می‌باشد. مسایل دسته‌بندی به طور وسیعی در یادگیری ماشین مورد مطالعه قرار گرفته است. ارتباط روشنی بین دسته‌بندی درخت‌های تصمیم در یادگیری ماشین و تفکیک‌پذیری هندسی در هندسه محاسباتی وجود دارد [۳] و [۴]. مستطیل یکی از اشکال هندسی تفکیک‌کننده است که در دسته‌بندی نقاط در یادگیری ماشین و در مسایل دنیای واقعی بسیار کاربرد دارد [۴] و [۵]. نمونه‌ای از اجرای الگوریتم‌های تفکیک‌پذیری هندسی با مستطیل بر روی پایگاه داده‌های دنیای واقعی در [۴] آورده شده است. یکی دیگر از کاربردهای اشکال هندسی متعامد، به کار بردن آنها در طراحی مدارات VLSI است. مطالعه‌ای جامع بر روی کاربردهای الگوریتم‌های هندسه محاسباتی و بهره‌گیری از اشکال هندسی متعامد در طراحی مدارات VLSI توسط ساتو^۲ و اوتوسکی^۳ انجام شده است [۶].

تاکنون پژوهش‌های چندی در زمینه تفکیک‌پذیری توسط مستطیل و مربع در هندسه محاسباتی ارائه شده است که در ادامه به آن می‌پردازیم. در مقالات مربوط به تفکیک‌پذیری با مستطیل، تفکیک با یک مستطیل و دو مستطیل ارائه شده است. تفکیک کامل با یک مستطیل توسط کرولد^۴ و همکارانش مورد بررسی قرار گرفته است [۷]. در این مسأله، مستطیل فقط شامل نقاط از یک رنگ است و نقاط از رنگ دیگر، خارج از مستطیل واقع می‌شوند. ممکن است تفکیک با یک مستطیل به صورت کامل امکان‌پذیر نباشد. تفکیک با یک مستطیل موازی محورهای مختصات، با هدف دربرگرفتن حداکثر تعداد نقاط هم‌رنگ داخل مستطیل، به نحوی که نقطه‌ای از رنگ دیگر داخل مستطیل واقع نباشد، توسط اکستین^۵ و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [۸]. نسخه d بعدی این مسأله توسط بکر^۶ و کیل^۷ مورد توجه قرار گرفت [۹]. تفکیک با یک مستطیل با هدف حداکثر اختلاف بین تعداد نقاط از یک رنگ و رنگ دیگر داخل مستطیل نیز مسأله دیگری است که در زمینه تفکیک نقاط با یک مستطیل ارائه شده است (در این حالت مستطیل دارای نقاط از هر دو رنگ می‌باشد) [۴] و [۸].

تفکیک با دو مستطیل، چنانچه دو مستطیل به گونه‌ای در صفحه قرار گیرند که اضلاع آنها موازی یکدیگر بوده و نقاطی که در یک مستطیل

چکیده: تفکیک‌پذیری نقاط رنگی با اشکال هندسی یکی از مسایل مطرح در هندسه محاسباتی است که کاربردهایی از جمله در یادگیری ماشین و شناسایی الگو دارد. در این مسأله دو سری نقطه P و Q به ترتیب به رنگ‌های قرمز و آبی و به اندازه n در صفحه داده شده است. حال لازم است یک شکل هندسی مشخص را به گونه‌ای در صفحه قرار دهیم که کلیه نقاط آبی را در بر گرفته و شامل هیچ نقطه قرمزی نباشد. در کارهای پیشین الگوریتم‌هایی برای تفکیک‌پذیری نقاط با گوه و مستطیل ارائه گردیده ولی تا به حال الگوریتمی برای تفکیک‌پذیری نقاط با یک مثلث و همچنین مثلثی که یک زاویه آن مشخص باشد (مثلاً قائم‌الزاویه) ارائه نشده است. در این مقاله الگوریتمی جدید و کارا برای تفکیک‌پذیری نقاط رنگی با مثلث قائم‌الزاویه ارائه می‌کنیم که قادر خواهد بود با استفاده از راهکار خط جاورب^۱ چرخشی، معرفی رخدادهای پردازش آنها در زمان کارای $O(n \log n)$ کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را گزارش کند.

کلید واژه: هندسه محاسباتی، تفکیک‌پذیری، سری نقاط دورنگ، مثلث قائم‌الزاویه، یادگیری ماشین، دسته‌بندی.

۱- مقدمه

در مسأله تفکیک‌پذیری پایه، ۲ مجموعه نقطه P و Q به ترتیب به رنگ‌های آبی و قرمز و یک شکل هندسی C داده شده است. هدف، پیدا کردن محلی برای قراردادن شکل C است به طوری که همه نقاط آبی داخل C و همه نقاط قرمز خارج از آن قرار گیرند. تا پایان این مقاله از این تعریف برای معرفی نقاط آبی Q ، نقاط قرمز P و همچنین شکل هندسی تفکیک‌کننده استفاده می‌کنیم. تفکیک‌پذیری هندسی دارای کاربردهای زیادی در تحلیل تصاویر، گرافیک کامپیوتری، محاسبات آماری، یادگیری ماشین، شناسایی الگو و سایر زمینه‌هایی است که در آن دسته‌بندی مورد نیاز است [۱] تا [۴].

در این مقاله قصد داریم مسأله تفکیک‌پذیری با یک مثلث قائم‌الزاویه مینیمال را مورد بررسی قرار دهیم. در این مسأله، دو مجموعه نقطه P و Q به ترتیب به رنگ‌های قرمز و آبی به اندازه n داده شده است. هدف، محاسبه کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه است به طوری که کلیه نقاط Q را در برگیرد و هیچ نقطه‌ای از P را شامل نشود، همچنین هر سه ضلع آن بر $CH(Q)$ مماس باشد که در آن $CH(Q)$ ، رویه محدب نقاط آبی است. در این مقاله به این مثلث، مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال گفته می‌شود.

محاسبه مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال به عنوان یک پیش‌پردازش برای محاسبه مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده با کمترین

این مقاله در تاریخ ۲۲ اردیبهشت ماه ۱۳۹۳ دریافت و در تاریخ ۵ آبان ماه ۱۳۹۳ بازنگری شد.

زهرا مصلحی، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: zahra_moslehi83@aut.ac.ir).

علیرضا باقری، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: ar_bagheri@aut.ac.ir).

1. Sweeping Line

2. Sato
3. Ohtsuki
4. Kreveld
5. Eckstein
6. Backer
7. Keil

چندضلعی محدب تفکیک‌کننده با حداقل تعداد ضلع، ارائه حد پایین برای تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث و پوشش نقاط تک‌رنگ با مثلث با یک زاویه مشخص می‌باشد. در زیربخش آتی در مورد مزیت الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله نسبت به کارهای موجود صحبت خواهیم کرد.

۲-۱ نتایج به دست آمده

در این مقاله در ابتدا قبل از اجرای الگوریتم، شدنی بودن مسأله مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. یکی از شرایط لازم برای تفکیک‌پذیری بودن نقاط توسط مثلث قائم‌الزاویه آن است که رویه محدب نقاط آبی تک‌رنگ باشد. در غیر این صورت بدون هیچ گونه پردازشی عدم تفکیک‌پذیری نقاط توسط مثلث قائم‌الزاویه گزارش می‌شود. پس از آن به معرفی الگوریتم خود خواهیم پرداخت. الگوریتمی که برای محاسبه مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده ارائه می‌کنیم شامل ۴ مرحله اصلی است. برای اجرای دو مرحله ابتدایی از ساختمان داده‌های ارائه‌شده توسط سیرا و کرولد بهره می‌بریم. آنها به ترتیب هر یک از این ساختمان داده‌ها را برای تفکیک‌پذیری نقاط با گوه و مستطیل ارائه کردند. حال، دو ساختمان داده موجود را به شکل زیبایی با هم ترکیب می‌کنیم و به کمک آنها الگوریتمی جدید و کارا برای تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث قائم‌الزاویه ارائه می‌کنیم. در این مقاله، مهم‌ترین بخش الگوریتم و ایده اصلی کار را در قالب یک لم اثبات می‌کنیم. این لم شروعی برای مراحل سه و چهار الگوریتم می‌باشد. مراحل سه و چهار شامل معرفی چند رخداد و پردازش آنها است. اگر $CH(Q)$ رویه محدب نقاط آبی باشد، استخراج رخدادها با توجه به چرخش رأس قائمه مثلث قائم‌الزاویه حول $CH(Q)$ انجام می‌شود. در نهایت برای اثبات پیچیدگی زمانی الگوریتم، لازم است چندین لم و قضیه را اثبات کنیم. الگوریتمی که برای حل این مسأله ارائه خواهیم کرد قادر خواهد بود در زمان کارای $O(n \log n)$ کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را گزارش کند. در نهایت لازم است اشاره کنیم یکی از محاسن الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله نسبت به مسأله مورد بررسی توسط ادلزونر و پریپاراتا، آن است که در اینجا به محاسبه کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده می‌پردازیم، حال آن که آنها در مقاله خود صرفاً یک چندضلعی محدب تفکیک‌کننده با کمترین تعداد ضلع را گزارش می‌کنند. بنابراین چنانچه نقاط تفکیک‌پذیر با مثلث باشند، تنها یک مثلث را گزارش می‌کنند و از طرفی همان طور که در قسمت تاریخیچه به آن اشاره شد یک کران پایین برای تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث ارائه شده که در آن فقط به تصمیم تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث می‌پردازد و به گزارش هیچ یک از مثلث‌های تفکیک‌کننده نمی‌پردازد. این در حالی است که ما در این مقاله کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال را گزارش خواهیم کرد. از طرفی یکی از تفاوت‌های بارز بین مسأله مورد بررسی در این مقاله و مسأله پوشش نقاط تک‌رنگ با مثلث با یک زاویه داخلی مشخص آن است که در این مقاله، مجموعه نقاط از دو رنگ تشکیل شده و تأکید مقاله بر تفکیک‌پذیری نقاط است، حال آن که در مسأله پوشش، مجموعه نقاط از یک رنگ تشکیل شده‌اند و مقاله بر کمینه‌شدن مساحت مثلث تأکید دارد.

در ادامه، ابتدا در بخش ۲ به شرح الگوریتم خود برای تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث قائم‌الزاویه می‌پردازیم. ۴ مرحله اصلی الگوریتم در ۴ زیربخش جداگانه در بخش ۲ شرح داده می‌شود و پس از آن در بخش ۳ نتیجه‌گیری و مسایل باز مطرح می‌شوند.

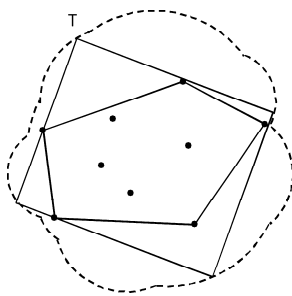
قرار می‌گیرند (که در مستطیل دیگر قرار ندارند) تک‌رنگ باشند، یکی از مسایلی است که در زمینه تفکیک نقاط با دو مستطیل ارائه شده است [۱۰] و [۱۱]. به عبارتی اگر R را مستطیل دربرگیرنده نقاط قرمز و B را مستطیل دربرگیرنده نقاط آبی تعریف کنیم، نقاط داخل $B - R$ فقط از رنگ آبی و نقاط داخل $R - B$ فقط از رنگ قرمز تشکیل می‌شوند. در این مسأله هدف، بیشینه‌کردن تعداد نقاط داخل $(R \cup B) - (R \cap B)$ است یعنی نقاطی که در فصل مشترک دو مستطیل و خارج از دو مستطیل واقع می‌شوند، از مجموعه نقاط حذف خواهند شد. تفکیک با دو مربع واحد مجزا و تک‌رنگ موازی با محورهای مختصات، تحت شرایطی که هر مربع تنها شامل نقاط از یک رنگ باشد و با هدف حفظ بزرگ‌ترین زیرمجموعه از نقاط توسط کبلو^۱ و همکارانش بررسی گردیده است [۱۲] و [۱۳]. همچنین الگوریتم محاسبه دو مستطیل مجزا و موازی محورهای مختصات به طوری که کلیه نقاط آبی داخل آن دو مستطیل و کلیه نقاط قرمز خارج از آنها واقع شوند، یکی دیگر از الگوریتم‌های مطرح‌شده در این زمینه می‌باشد [۱۴].

از دیگر مسایل تفکیک‌پذیری هندسی می‌توان به تفکیک‌پذیری هندسی با دایره اشاره کرد. در زمینه تفکیک‌پذیری نقاط با دایره، مسایل تشخیص تفکیک‌پذیری با دایره و همچنین محاسبه دایره با حداقل و حداکثر شعاع مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۵]. تفکیک‌پذیری با یک خط، یک گوه، دو گوه، خطوط موازی، تفکیک‌پذیری k سری نقطه با $k-1$ خط موازی و k گوه با یک رأس مشترک، مسایل دیگری در زمینه تفکیک‌پذیری است که توسط سیرا^۲ مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. تفکیک‌پذیری سه‌بعدی با هرم و منشور نیز از مسایلی است که در سه بعد حل شده است [۱] و [۱۶]. از موارد تفکیک با شیء هندسی غیر محدب می‌توان تفکیک با چندضلعی L شکل را نام برد [۱۷]. L شکل به صورت $M - M'$ تعریف می‌شود که در آن M و $M' \subset M$ مستطیل‌های موازی محورهای مختصات هستند که در آن $M' \subset M$ و گوشه بالای سمت راست این مستطیل‌ها با یکدیگر اشتراک دارد. پیدا کردن یک چندضلعی محدب با حداقل تعداد ضلع که دو مجموعه نقطه را از یکدیگر جدا کند، توسط ادلزونر^۳ و پریپاراتا^۴ مطالعه شده است [۱۸]. همچنین نشان داده شده که تصمیم آن که دو سری نقطه با مثلث قابل تفکیک هستند یا خیر به زمان $\Omega(n \log n)$ نیاز دارد [۱].

مسایلی مشابه برای پوشش سری نقاط تک‌رنگ با اشکال هندسی مختلف به همراه پارامترهای بهینه‌سازی متفاوت تا کنون مورد بررسی قرار گرفته است [۱۹] تا [۲۲]. در زمینه پوشش نقاط تک‌رنگ می‌توان به مسأله پوشش مجموعه نقاط تک‌رنگ با مثلث با کمترین مساحت و با یک زاویه داخلی مشخص اشاره کرد [۲۳].

همان طور که دیدیم، تا کنون کارهای زیادی در زمینه تفکیک‌پذیری نقاط با مستطیل انجام شده است. از طرفی ممکن است نقاط قرمز و آبی به گونه‌ای در بین یکدیگر قرار گرفته باشند به طوری که نقاط قابل تفکیک با مستطیل نباشد. در این صورت سعی می‌کنیم شکل هندسی تفکیک‌کننده خود را محدودتر کنیم. بنابراین مسأله تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث قائم‌الزاویه مطرح می‌گردد که در این مقاله به آن خواهیم پرداخت. نزدیک‌ترین مسایل به مسأله مورد بررسی در این مقاله، پیدا کردن

1. Cabello
2. Seara
3. Edelsbrunner
4. Preparata



شکل ۳: محاسبه خط سیر T [۷].

تعریف ۲: نقطه p_j نسبت به $CH(Q)$ مینیمال است اگر هیچ نقطه p_i بر آن غلبه نکند [۸].

واضح است که در محاسبه A تنها به نقاط مینیمال نیاز داریم چرا که نقاط مینیمال به تنهایی می‌توانند کل ناحیه A را شکل دهند. در واقع ناحیه ممنوعه متناظر با سایر نقاط، زیرمجموعه ناحیه A خواهد بود به طوری که A اجتماع نواحی ممنوعه متناظر با نقاط مینیمال است. شکل ۲ ناحیه \bar{A} را نشان می‌دهد.

لم ۱: ناحیه \bar{A} در زمان $O(n \log n)$ محاسبه می‌شود [۸].

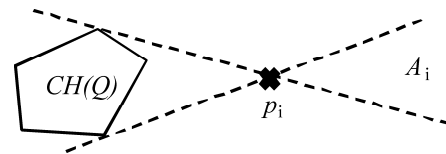
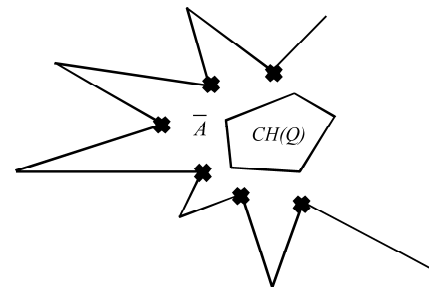
۲-۲ به دست آوردن خط سیر زاویه قائمه حول $CH(Q)$

در گام دوم، مکان هندسی رأس قائمه مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را به دست می‌آوریم. برای این قسمت از الگوریتم، از مفهومی که در [۷] ارائه شده استفاده می‌کنیم. محل قرارگیری رأس قائمه مثلث قائم‌الزاویه مماس بر $CH(Q)$ روی مجموعه‌ای از کمان‌های دایره‌ای واقع است که به آن خط سیر زاویه قائمه می‌گوییم و آن را با \square نشان می‌دهیم. این کمان‌های دایره‌ای با چرخش کامل رأس قائمه حول $CH(Q)$ به اندازه زاویه 2π به دست می‌آیند. شکل ۳ خط سیر زاویه قائمه را نشان می‌دهد که به صورت منحنی‌های خط‌چین مشخص شده است [۷].

لم ۲: T شامل $O(n)$ رأس و کمان دایره‌ای است و با فرض وجود $CH(Q)$ ، در زمان $O(n)$ محاسبه می‌شود [۷].

۳-۲ محاسبه نقاط رخداد (بخش‌بندی خط سیر T)

ترکیب مطالب دو بخش قبل و همچنین مطالب این بخش از جمله نوآوری‌های این مقاله است و در ادامه بیان می‌شود. پس از مشخص کردن خط سیر زاویه قائمه حول $CH(Q)$ ، با قرارگیری رأس قائمه روی نقاط T ، وجود مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را بررسی می‌کنیم. واضح است که مجموعه نقاط مربوط به خط سیر T که داخل ناحیه ممنوعه A واقع است نقاط غیر مفید خواهند بود یعنی نمی‌توان رأس زاویه قائمه مثلث تفکیک‌کننده را روی آن نقاط قرار داد. هدف ما تقسیم خط سیر T به مجموعه بازه‌هایی است که با فرض قرارگیری رأس قائمه مثلث روی مجموعه نقاط آن بازه بتوان مشخص کرد مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده برای کل نقاط آن بازه وجود دارد یا خیر. در شکل ۴ به زاویه قائمه‌ای که رأس آن روی نقطه w واقع شده است توجه کنید. دو ضلع زاویه قائمه را آن قدر امتداد می‌دهیم تا به اضلاع σ برخورد کند. برای مثال در شکل ۴ اضلاع زاویه قائمه، σ را در نقاط r و l قطع می‌کند. ضلعی از σ که r و l روی آن واقع شده را به ترتیب R و L می‌نامیم. پاره‌خط‌های (w, l) و (w, r) را از سمت w به r و l جهت‌دار می‌کنیم. ضلع (w, r) ضلعی است که $CH(Q)$ در سمت چپ آن واقع شده و آن را $r(w)$ و ضلع (w, l) ضلعی است که $CH(Q)$ سمت راست آن واقع است و آن را $l(w)$ می‌نامیم.

شکل ۱: محاسبه ناحیه A_i [۸].شکل ۲: محاسبه چندضلعی ستاره‌مانند σ و ناحیه \bar{A} .

۲- الگوریتم

فرض کنید $|P|, |Q| \geq 3$ و هر یک از آنها حداقل سه نقطه غیر هم خط داشته باشند. یک شرط لازم برای تفکیک نقاط با یک مثلث قائم‌الزاویه آن است که رویه محدب نقاط آبی تک‌رنگ باشد $(CH(Q))$ ، یعنی شامل نقاط قرمز نباشد. منظور از رویه محدب نقاط آبی، کوچک‌ترین چندضلعی محدب دربرگیرنده کلیه نقاط آبی است. از آنجا که رویه محدب نقاط آبی، کوچک‌ترین چندضلعی محدب است که نقاط آبی را پوشش می‌دهد، اگر تک‌رنگ نباشد، هیچ چندضلعی محدب دیگری از جمله مثلث قائم‌الزاویه که بتواند فقط نقاط آبی را پوشش دهد وجود نخواهد داشت. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم دو مجموعه نقطه تفکیک‌پذیر با یک خط نباشند و همچنین $CH(Q)$ تک‌رنگ باشد. در این بخش، الگوریتم محاسبه کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را بیان می‌کنیم. با توجه به این که الگوریتم ارائه‌شده، کلیه مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را در صورت وجود پیدا می‌کند، اگر الگوریتم هیچ مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده‌ای گزارش نکند، آن گاه مجموعه نقاط داده شده، تفکیک‌پذیر با مثلث قائم‌الزاویه نخواهند بود.

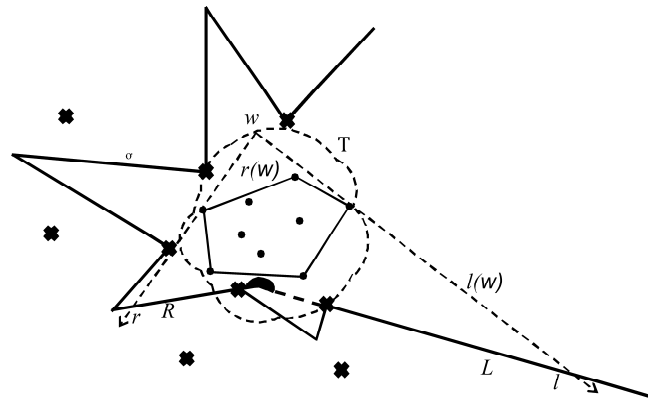
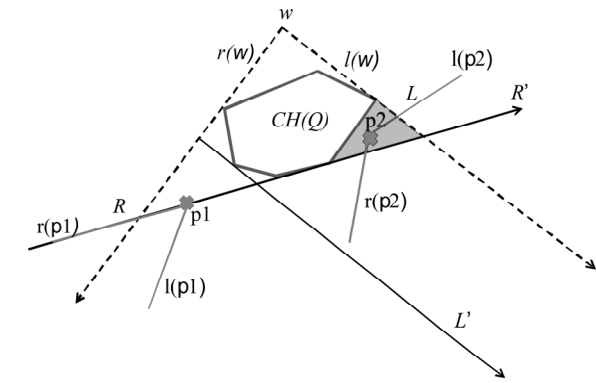
در ادامه هر یک از مراحل الگوریتم در زیربخش‌های جداگانه آورده شده است.

۱-۲ ساخت چندضلعی ستاره‌ای خالی از نقاط قرمز

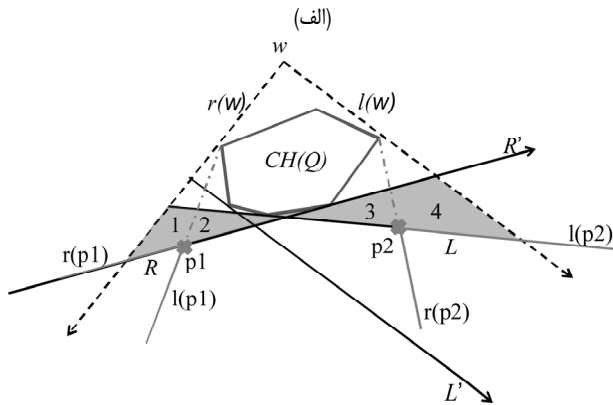
در این قسمت از الگوریتم، ناحیه‌ای را محاسبه می‌کنیم که رئوس مثلث تفکیک‌کننده نمی‌تواند در آن واقع شود. برای محاسبه این ناحیه از ساختمان داده‌ای که در [۸] معرفی شده استفاده می‌کنیم. ابتدا با رسم خطوط پشتیبان از هر $p_i \in P$ بر $CH(Q)$ ، ناحیه ممنوعه A_i را به دست می‌آوریم که هیچ یک از رئوس مثلث قائم‌الزاویه نمی‌تواند در آن ناحیه واقع شود (شکل ۱). در غیر این صورت مثلث قائم‌الزاویه نقطه قرمز p_i را دربر خواهد گرفت. نقاط قرمز را با \times نشان می‌دهیم.

اگر اجتماع نواحی ممنوعه را A بنامیم $(A = \bigcup_{i=1}^n A_i)$ در این صورت واضح است که مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده (در صورت وجود) داخل ناحیه \bar{A} واقع می‌شود که ناحیه \bar{A} مکمل ناحیه A است. ناحیه \bar{A} همان طور که خواهیم دید، داخل و روی یک چندضلعی ستاره‌ای σ است که $CH(Q)$ هسته آن است (شکل ۲).

تعریف ۱: اگر A_i و A_j به ترتیب ناحیه ممنوعه متناظر با p_i و p_j و $A_i \subset A_j$ باشد، آن گاه p_i بر p_j نسبت به $CH(Q)$ غلبه می‌کند [۸].



شکل ۴: نمایش محل تلاقی امتداد اضلاع قائمه و چندضلعی ستاره‌مانند تهی از نقاط قرمز، همچنین نمایش زاویه داخلی مابین امتداد R و L .



(ب)

شکل ۵: (الف) اگر p_r در ناحیه تیره واقع شود، زاویه داخلی بین امتداد R و L کمتر از ۱۸۰ درجه می‌شود و (ب) اگر p_r سمت راست R' و سمت چپ L' باشد زاویه بین امتداد R و L بیش از ۱۸۰ درجه خواهد بود.

خط R' باشد این زاویه به ۱۸۰ درجه می‌رسد و اگر در ناحیه تیره در شکل ۵-الف (ناحیه محدود به $CH(Q)$ ، خط R' و $l(w)$) باشد، زاویه بین آنها کمتر از ۱۸۰ درجه می‌شود.

وتر مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده، پاره‌خطی است که بر $CH(Q)$ مماس و بالای (هم‌خط) R و L است.

زمانی که p_r در ناحیه تیره در شکل ۵-الف است چنین وتیری نمی‌توان یافت چرا که اگر چنین وتیری وجود داشته باشد در صورتی که هم‌خط یا بالای R باشد قبل از برخورد به $l(w)$ به $r(p_r)$ برخورد می‌کند و اگر هم‌خط یا بالای L باشد قبل از برخورد به $r(w)$ به $l(p_r)$ برخورد خواهد کرد.

همان طور که گفته شد اگر p_r سمت راست R' و سمت چپ L' باشد زاویه بین امتداد R و L بیش از ۱۸۰ درجه خواهد بود. به شکل ۵-ب توجه کنید. ادعا می‌کنیم اگر p_r در این ناحیه قرار گیرد کل پاره‌خطهای ناحیه تیره که یک سر آنها روی $r(w)$ و یک سر آنها روی $l(w)$ است می‌تواند به عنوان وترهای مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال گزارش شود. در واقع می‌توان ادعا کرد در این ناحیه هیچ نقطه‌ای از مجموعه P وجود ندارد. ناحیه تیره اجتماع بخشی از ناحیه ۱، ناحیه ۲، ناحیه ۳ و ناحیه ۴ است.

اگر نقطه قرمزی در ناحیه ۱ واقع شود پاره‌خط R تغییر می‌کند. اگر در ناحیه ۲ واقع شود در این صورت p_r مینیمال نیست. اگر در ناحیه ۳ قرار گیرد p_r مینیمال نیست. اگر در ناحیه ۴ واقع شود پاره‌خط L تغییر می‌کند. پس هیچ نقطه‌ای از مجموعه P در این نواحی نیست و کل پاره‌خطها در ناحیه تیره که یک سر آنها روی $r(w)$ و یک سر آنها روی $l(w)$ است به عنوان وترهای مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال گزارش می‌شود.

تشخیص تفکیک‌پذیر بودن نقاط با مثلث قائم‌الزاویه با رأس قائمه w به کمک زاویه داخلی مابین امتداد R و L تعیین می‌شود (شکل ۴).
 لم زیر مهم‌ترین بخش الگوریتم را مشخص می‌سازد و در واقع ایده اصلی الگوریتم در لم زیر نهفته است.
 لم ۳: اگر زاویه داخلی مابین امتداد R و L کمتر از ۱۸۰ درجه باشد مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده با رأس قائمه w وجود ندارد و اگر این زاویه بیشتر یا مساوی ۱۸۰ درجه باشد حداقل یک مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده با رأس قائمه w وجود دارد.

اثبات: ابتدا تعاریف زیر را در نظر بگیرید (شکل ۵):

p_r : نقطه مینیمال روی پاره‌خط (نیم‌خط) R .

p_l : نقطه مینیمال روی پاره‌خط (نیم‌خط) L .

خط پشتیبان چپ (راست): خط گذرنده از $p \in P$ است که بر $CH(Q)$ مماس است، جهت این خط از p به سمت محل تماس خط و $CH(Q)$ است و $CH(Q)$ سمت راست (سمت چپ) این خط واقع شده است.

$l(p)$: پاره‌خط یا نیم‌خطی از σ است که بر خط پشتیبان چپ منطبق می‌شود.

$r(p)$: پاره‌خط یا نیم‌خطی از σ است که بر خط پشتیبان راست منطبق می‌شود.

L' : خط جهت‌دار مماس بر $CH(Q)$ به موازات $l(w)$ (جهت آن در شکل ۵ مشخص شده و هم‌جهت با $l(w)$ است).

R' : خط جهت‌دار گذرنده از p_r در راستای R (جهت آن در شکل ۵ مشخص شده و از p_r به سمت نقطه تماس با $CH(Q)$ است). نواحی زیر در شکل ۵-ب مشخص شده است:

ناحیه ۱: ناحیه محدود به امتداد $l(p_r)$ ، $CH(Q)$ ، $r(w)$ و R .

ناحیه ۲: ناحیه محدود به امتداد $l(p_r)$ و امتداد $r(p_r)$ و $CH(Q)$.

ناحیه ۳: ناحیه محدود به امتداد $l(p_r)$ و امتداد $r(p_r)$ و $CH(Q)$.

ناحیه ۴: ناحیه محدود به امتداد $r(p_r)$ ، $CH(Q)$ ، $l(w)$ و L .

بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم نقطه p_r (روی پاره‌خط R) ثابت است و در مورد محل قرارگیری نقطه p_l بحث می‌کنیم. واضح است که نقطه p_l نمی‌تواند سمت راست L' باشد چرا که اگر سمت راست L' باشد، $l(p_r)$ و $l(w)$ نسبت به هم واگرا می‌شوند و $l(p_r)$ نمی‌تواند L باشد. این در حالی است که فرض کردیم p_r نقطه مینیمال روی پاره‌خط (نیم‌خط) L است. همان طور که در شکل ۵-ب نیز مشخص است اگر p_r سمت چپ L' و سمت راست R' واقع باشد، زاویه بین امتداد R و L بیش از ۱۸۰ درجه می‌شود. اگر p_r روی

رخدادها برابر $O(n)$ می‌باشد. برای محاسبه رخداد‌های نوع ۱ (به همین ترتیب نوع ۲) باید محل تلاقی امتداد اضلاع σ (به همین ترتیب خود اضلاع σ) و T را به دست آوریم. تلاقی هر ضلع σ با T با یک جستجوی دودویی روی کمان‌های T در زمان $O(\log n)$ محاسبه می‌شود. چرا که طبق لم ۲، T دارای $O(n)$ کمان می‌باشد و ترتیب مجاورت این کمان‌ها نیز مشخص است. از آنجا که σ دارای حداکثر $O(n)$ ضلع است، بنابراین محل تلاقی کل اضلاع σ و T در زمان $O(n \log n)$ به دست می‌آید.

۲-۴ پردازش رخدادها

بر اساس مطالب ذکر شده تا کنون، پس از محاسبه نقاط رخداد و بخش‌بندی خط سیر T ، کافی است وجود مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده، به ازای یک نقطه دلخواه از هر بازه بررسی شده و نتیجه به دست آمده برای کل نقاط آن بازه تعمیم داده شود. اگر به ازای هیچ یک از بازه‌های \square مثلث تفکیک‌کننده وجود نداشته باشد، سری نقاط تفکیک‌پذیر با مثلث قائم‌الزاویه نیستند. پردازش رخدادها با توجه به نوع آنها به صورت زیر انجام می‌شود:

(۱) رخداد خروج: اگر w داخل ناحیه مجاز \bar{A} است، این رخداد محل خروج از ناحیه A است و کلیه نقاط مابین رخداد خروج فعلی و رخداد خروج بعدی غیر مفید هستند، یعنی به ازای آنها مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده وجود ندارد. در این حالت کلیه نقاط رخداد هم‌خطی موجود در صف رخداد تا رسیدن به رخداد خروج بعدی بدون هیچ پردازشی از صف حذف می‌گردند. اگر w خارج از ناحیه مجاز است با رسیدن به نقطه رخداد خروج، وارد ناحیه مجاز A می‌گردد. در این حالت پردازش خاصی لازم نیست انجام شود.

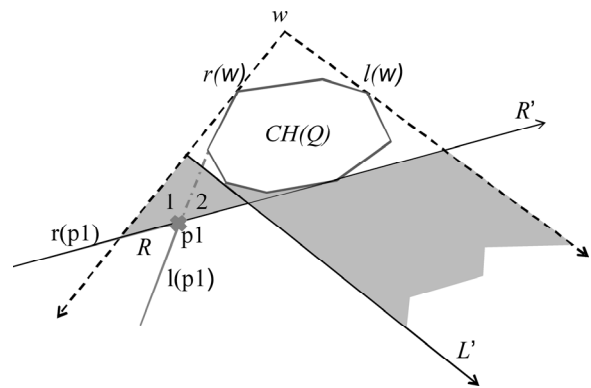
(۲) رخداد هم‌خطی: زمانی که با این رخداد مواجه شدیم R و L را به روز می‌کنیم و بر اساس زاویه داخلی بین آنها تصمیم می‌گیریم کلیه نقاط مابین رخداد هم‌خطی فعلی و رخداد هم‌خطی بعدی مفید هستند یا خیر. اگر زاویه داخلی بین R و L جدید کمتر از 180° درجه باشد، مجموعه نقاط تفکیک‌پذیر با مثلث قائم‌الزاویه نخواهند بود.

لازم به ذکر است پردازش این دو نوع رخداد در زمان ثابت انجام می‌شود.

۲-۵ تشخیص تفکیک‌پذیری با مثلث قائم‌الزاویه و گزارش مثلث‌های تفکیک‌کننده

می‌دانیم کلیه نقاط رخداد به ترتیب موقعیت آنها روی T در صف رخداد ذخیره شده‌اند. همچنین کلیه اضلاع σ به ترتیب حضور آنها پیرامون $CH(Q)$ ذخیره شده‌اند. فرض می‌کنیم w یک نقطه دلخواه از T است که در فاصله آخرین نقطه رخداد تا اولین نقطه رخداد قرار دارد. با مکان‌یابی نقطه در زمان $O(n \log n)$ تشخیص می‌دهیم نقطه w داخل ناحیه مجاز \bar{A} است یا خیر [۲۴]. همچنین به کمک مسأله پرتاب پرتو^۱ در یک چندضلعی ساده در زمان $O(\log n)$ می‌توان R و L متناظر با اضلاع زاویه قائمه w را محاسبه کرد [۲۵]. شکل ۷ شبه‌کد مربوط به الگوریتم تشخیص تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث قائم‌الزاویه و گزارش آنها را نشان می‌دهد.

حال در قضیه زیر با توجه به کلیه مطالب گفته‌شده تاکنون، مرتبه



شکل ۶: عدم وجود نقطه قرمز در ناحیه محدود به سمت چپ L' ، $CH(Q)$ و سمت راست $l(w)$ و در نتیجه عدم وجود L .

نکته: دقت کنید در برخی از موارد ممکن است R یا L قابل تعریف نباشند. به عنوان مثال فرض کنید در شکل ۵ پاره‌خط (یا نیم‌خط) L قابل تعریف نباشد. این در صورتی است که هیچ نقطه قرمزی در ناحیه محدود به سمت چپ L' ، $CH(Q)$ و سمت راست $l(w)$ وجود نداشته باشد. در این صورت L' نقش L در لم ۳ را ایفا خواهد کرد. در واقع، کلیه پاره‌خط‌های موجود در ناحیه تیره در شکل ۶ که یک سر آنها روی $r(w)$ و یک سر آنها روی $l(w)$ است به عنوان وترهای مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال گزارش می‌شود.

در لم ۳ دیدیم با فرض ثابت در نظر گرفتن رأس زاویه قائمه، تفکیک‌پذیری نقاط به کمک زاویه مابین امتداد R و L مشخص می‌گردد. از آنجا که زاویه بین امتداد R و L مشخص می‌کند که سری نقاط تفکیک‌پذیر با مثلث قائم‌الزاویه هستند یا خیر، بنابراین زمان چرخش زاویه قائمه حول $CH(Q)$ روی خط سیر T ، مادامی که R و L تغییر نکرده‌اند (اضلاع σ که $l(w)$ و $r(w)$ با آنها برخورد دارد تغییر نکند) کلیه نقاط روی T وضعیت مشابه دارند، یعنی یا به ازای همه آنها مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده وجود دارد یا برای هیچ یک وجود ندارد. بنابراین T به یک سری بازه شکسته شده و بررسی یک نقطه از آن بازه کفایت می‌کند تا بتوان وجود یا عدم وجود مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده را برای کل نقاط آن بازه نشان داد.

مطابق با مطالب ذکر شده می‌توان دو نوع رخداد به صورت زیر تعریف کرد:

(۱) رخداد خروج: این رخداد زمانی اتفاق می‌افتد که σ و T همدیگر را قطع می‌کنند. به ازای کلیه نقاطی از T که داخل ناحیه A واقع شده است مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده وجود ندارد. بنابراین محل تلاقی T و σ را به عنوان نقاط رخداد خروج گزارش می‌کنیم.

(۲) رخداد هم‌خطی: این رخداد زمانی اتفاق می‌افتد که با چرخش زاویه قائمه روی T ، R یا L تغییر کند. در طول حرکت w روی T ، R (به همین ترتیب L) در صورتی تغییر می‌کند که $r(w)$ (به همین ترتیب $l(w)$) با پاره‌خط یا نیم‌خط بعد از R (به همین ترتیب L) هم‌خط شود. بنابراین کافی است هر یک از اضلاع σ را آن قدر امتداد دهیم که با T برخورد کند و دورترین نقطه تلاقی آنها را به عنوان نقاط رخداد گزارش کنیم. بنابراین این نقاط متناظر با نقاطی است که حداقل یکی از R یا L تغییر کند.

لم ۴: تعداد کل رخداد‌های نوع ۱ و ۲ $O(n)$ است و در زمان $O(n \log n)$ محاسبه می‌شود.

اثبات: تعداد کل رخدادها متناظر با تعداد اضلاع چندضلعی σ است که تعداد اضلاع σ دو برابر تعداد نقاط مینیمال است. بنابراین تعداد کل

مثلث دلخواه برابر با $\Omega(n \log n)$ است، ولی حد پایین زمان اجرای مسأله تفکیک‌پذیری با مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده همچنان ناشناخته است چرا که مثلث قائم‌الزاویه حالت خاصی از کلیه مثلث‌های موجود می‌باشد. علاقه‌مندیم اثبات کنیم الگوریتمی با مرتبه زمانی پایین‌تر از $O(n \log n)$ برای این مسأله وجود ندارد. همچنین پیدا کردن مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده با کمترین مساحت به عنوان یک مسأله باز پیشنهاد می‌شود. از آنجا که فرض کردیم اضلاع مثلث بر رویه محدب نقاط مماس است، تا حدی مساحت مثلث‌های گزارش شده کمینه است. حال گزارش مثلث با کمترین مساحت از بین کلیه مثلث‌های گزارش شده به عنوان یک مسأله باز پیشنهاد می‌گردد. همچنین علاقه‌مندیم در کارهای آتی عملکرد این الگوریتم را در دسته‌بندی مجموعه داده‌های دورده‌ای بر روی داده‌های دنیای واقعی بررسی کرده و عملکرد آن را با برخی تکنیک‌های شناخته‌شده در یادگیری ماشین از جمله عملکرد درخت‌های تصمیم مقایسه کنیم.

مراجع

- [1] C. Seara, *On Geometric Separability*, in: *Applied Mathematics*, Ph. D Thesis, University of Politcnica de Catalunya, 2002.
- [2] J. S. B. Mitchell, *Approximation Algorithms for Geometric Separation Problems*, Technical Report, AMS Dept., SUNY Stony Brook, NY, 1993.
- [3] D. P. Dobkin and D. Gunopulos, "Geometric problems in machine learning," *Lect. Notes in Comput. Sci.*, vol. 1148, pp. 121-132, 1996.
- [4] ز. مصلحی و م. پالهنج، "دسته‌بندی داده‌های دورده‌ای با ابرمستطیل موازی محورهای مختصات"، پنجمین کنفرانس فناوری اطلاعات و دانش، ۷ صص، شیراز، ۱۳۹۲.
- [5] P. L. Hammer, A. Kogan, B. Simeone, and S. Szedmak, "Pareto-Optimal Patterns in Logical Analysis of Data," in RUTCOR Research Report, 2001.
- [6] M. Sato and T. Ohtsuki, "Applications of computational geometry to VLSI layout pattern design," *INTEGRATION, the VLSI J.*, vol. 5, no. 3-4, pp. 303-317, Dec. 1987.
- [7] M. V. Kreveld, T. V. Lankveld, and R. Velthkamp, "Identifying well-covered minimal bounding rectangles in 2D point data," in *Proc. 25th Eur. Workshop on Comput. Geom.*, pp. 277-280, Belgium, Brussels, 16-18 Mar. 2009.
- [8] J. Eckstein, P. Hammer, Y. Liu, M. Nediak, and B. Simeone, "The maximum box problem and its application to data analysis," *Comput. Optim. and Appl.*, vol. 23, no. 3, pp. 85-98, 2002.
- [9] J. Backer and M. Keil, "The mono and bichromatic empty rectangle and square problems in all dimensions," in *LATIN 2010: Theoretical Informatics*, Springer Berlin Heidelberg, vol. 6034, pp. 14-25, App. 2010.
- [10] C. Cortes, *et al.*, "Bichromatic separability with two boxes: a general approach," *J. of Algorithms*, vol. 64, no. 2, pp. 79-88, Feb. 2009.
- [11] C. Cortes, J. Diaz-Baoez, and J. Urrutia, "Finding enclosing boxes with empty intersection," in *Proc. 23rd Eur. Workshop on Comput. Geom.*, EWCG'07, pp. 185-188, 19-21 Mar. 2007.
- [12] S. Cabello, J. M. Diaz-Banez, C. Seara, J. A. Sellares, J. Urrutia, and I. Ventura, "Covering point sets with two convex objects," in *Proc. 21st Eur. Workshop on Comput. Geom.*, EWCG'05, pp. 179-182, Mar. 2005.
- [13] S. Cabello, J. M. Diaz-Banez, C. Seara, J. Urrutia, and I. Ventura, "Covering point sets with two disjoint disks or squares," *Comput. Geom.: Theory and Appl.*, vol. 40, no. 3, pp. 195-206, Aug. 2008.
- [14] ز. مصلحی و ع. ر. باقری، "تفکیک‌پذیری سری نقاط دورنگ با دو مستطیل مجزا و موازی محورهای مختصات"، مجله علمی پژوهشی رایانش نرم و فناوری اطلاعات، جلد ۱، شماره ۲، صص. ۳۵-۴۲، پاییز ۱۳۹۱.
- [15] J. O'Rourke, S. R. Kosaraju, and N. Megiddo, "Computing circular separability," *Discrete Comput. Geom.*, vol. 1, pp. 105-113, 1986.
- [16] P. Agarwal, B. Aronov, and V. Koltun, "Efficient algorithms for bichromatic separability," *J. of ACM Trans. on Algorithms*, vol. 2, no. 2, pp. 209-227, Apr. 2006.
- [17] F. Sheikhi, M. de Berg, A. Mohades, and M. Davvodi, "Finding monochromatic l-shapes in bichromatic point sets," in *Proc. 22nd Canad. Conf. Comp. Geom.* pp. 269-272, Aug. 2010.

زمانی الگوریتم ارائه‌شده را اثبات می‌کنیم.

- (۱) $CH(Q)$ را محاسبه و تک‌رنگ بودن آن را ارزیابی کن. اگر $CH(Q)$ تک‌رنگ نبود سری نقاط قابل تفکیک با مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده نیست. در غیر این صورت به مرحله ۲ برو.
 - (۲) چندضلعی ستاره‌ای خالی از نقاط قرمز را مطابق بخش ۲-۱ محاسبه کن.
 - (۳) خط سیر زاویه قائمه حول $CH(Q)$ را به دست آور.
 - (۴) کلیه نقاط رخداد را محاسبه و به ترتیب در صف رخداد درج کن. همچنین اضلاع σ را به ترتیب در یک لیست پیوندی چرخشی درج کن.
 - (۵) w را یک نقطه دلخواه از \square در فاصله آخرین نقطه رخداد تا اولین نقطه رخداد قرار بده و L و R متناظر با آن را محاسبه کن.
 - (۶) تا زمانی که صف رخداد تهی نیست تکرار کن:
 - یک رخداد از صف رخداد خارج و آن را پردازش کن.
 - تفکیک‌پذیری در فاصله رخداد فعلی تا رخداد بعدی را گزارش کن.
 - w را نقطه‌ای جدید در فاصله بین رخداد فعلی تا رخداد بعدی قرار بده.
- ۷- پایان.

شکل ۷: الگوریتم تشخیص تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث قائم‌الزاویه و گزارش آنها.

قضیه ۱: تشخیص تفکیک‌پذیری نقاط با مثلث قائم‌الزاویه و گزارش کلیه مثلث‌های تفکیک‌کننده به زمان $O(n \log n)$ نیاز دارد.

اثبات: جهت بررسی تفکیک‌پذیری نقاط با یک مثلث قائم‌الزاویه باید $CH(Q)$ و چندضلعی ستاره‌ای σ را در زمان $O(n \log n)$ به دست آورد. سپس خط سیر T در زمان $O(n \log n)$ محاسبه می‌شود. به کمک چندضلعی σ و خط سیر T می‌توان دو رخداد هم‌خطی و خروج را مشخص کرد. طبق لم ۴ کلیه رخدادهای در زمان $O(n \log n)$ محاسبه می‌شود. بر اساس مطالب گفته‌شده در ابتدای این زیربخش، مقداردهی اولیه w ، تعیین موقعیت و محاسبه R و L متناظر با آن به زمان $O(n \log n)$ نیاز دارد. پردازش هر رخداد در زمان ثابت انجام می‌شود چرا که با داشتن R و L متناظر با نقطه ابتدایی و همچنین چندضلعی ستاره‌ای می‌توان R و L متناظر با نقاط رخداد را به سادگی در زمان ثابت محاسبه کرد. از آنجا که $O(n)$ رخداد وجود دارد، پردازش کلیه رخدادهای به زمان $O(n)$ نیاز دارد و بنابراین کل مراحل الگوریتم در زمان $O(n \log n)$ انجام می‌شود.

در آخر اشاره می‌کنیم چنانچه بخواهیم مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده با کمترین مساحت را محاسبه کنیم لازم است ابتدا مثلث‌های قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده مینیمال را محاسبه کنیم. به عبارتی، اضلاع مثلث با کمترین مساحت قطعاً بر $CH(Q)$ مماس خواهد بود. حال آن که از بین کلیه مثلث‌های مینیمال کدام یک دارای کمترین مساحت است ما را با یک مسأله جدید و پردازش‌های بیشتر روبه‌رو می‌کند. به عبارتی لازم است با توجه به فرمول مساحت برای مثلث یک سری رخدادهای جدید علاوه بر رخدادهای ذکر شده در این مقاله معرفی گردد، به طوری که بتوانیم با کمترین پردازش ممکن، مثلث با کمترین مساحت را گزارش کنیم. پرداختن به این مسأله چنانچه در بخش بعد نیز به آن اشاره می‌شود به عنوان یک مسأله باز پیشنهاد می‌گردد.

۳- نتیجه‌گیری و مسایل باز

ما در این مقاله یک الگوریتم جدید و کارا با زمان اجرای $O(n \log n)$ برای محاسبه مثلث قائم‌الزاویه تفکیک‌کننده در هر جهت دلخواه ارائه کردیم. اضلاع قائمه مثلث در هر راستای دلخواهی می‌توانند قرار گیرند. همچنین هر سه ضلع مثلث بر رویه محدب نقاط آبی مماس است. علی‌رغم آن که اثبات شده که حد پایین مسأله تفکیک‌پذیری نقاط با هر

زهرا مصلحی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۷ و ۱۳۹۱ از دانشگاه‌های یزد و صنعتی امیرکبیر به پایان رسانده است. از سال ۱۳۹۱، نام‌برده تحصیلات دکتری خود را در رشته مهندسی کامپیوتر در دانشگاه صنعتی اصفهان آغاز نموده است و در حال حاضر در حال گذراندن دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه ژنو می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: هندسه محاسباتی و کاربردهای آن، یادگیری ماشین و شناسایی الگو.

علیرضا باقری تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر - نرم افزار به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۵ و ۱۳۷۷ از دانشگاه صنعتی شریف و در مقطع دکتری مهندسی کامپیوتر در سال ۱۳۸۴ از دانشگاه صنعتی امیرکبیر به پایان رسانده است و از سال ۱۳۸۴ تا اکنون استادیار دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه صنعتی امیرکبیر است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: هندسه محاسباتی و کاربردهای آن، الگوریتم‌های گراف، پردازش و تحلیل کلان داده و تحلیل شبکه‌های اجتماعی.

- [18] H. Edelsbrunner and F. Preparata, "Minimum polygonal separation," *Inf. and Comput.*, vol. 77, no. 3, pp. 218-232, Jun. 1988.
- [19] E. M. Arkin, G. Barequet, and J. S. B. Mitchell, "Algorithms for two box covering," in *Proc. 22nd Annu. Symp. on Comput. Geom.*, pp. 459-467, Jun. 2006.
- [20] S. Bessamyatnikh and M. Segal, "Covering a set of points by two axis-parallel boxes," *Inf. Process. Lett.*, vol. 75, no. 3, pp. 95-100, Aug. 2000.
- [21] C. Figueiredo and G. Fonseca, "Enclosing weighted points with an almost-unit ball," *Inf. Process. Lett.*, vol. 109, no. 21-22, pp. 1216-1221, Aug. 2009.
- [22] P. Mahapatra, P. Goswami, and S. Das, "Maximal covering by two isothetic unit squares," in *Proc. of 20th Annual Canad. Conf. Comp. Geom.*, pp. 103-106, Montreal, Canada, 13-15 Aug. 2008.
- [23] P. Bose and J. L. De Carufel, "Minimum-area enclosing triangle with a fixed angle," *Comput. Geom.*, vol. 47, no. 1, pp. 90-109, Jan. 2014.
- [24] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, and M. Overmars, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 3rd Edition, TELOS, Santa Clara, CA, USA, 2008.
- [25] B. Chazelle, *et al.*, "Ray shooting in polygons using geodesic triangulations," *J. of Algorithmica*, vol. 12, no. 1, pp. 54-68, Jul. 1994.